2022

مذكرة التفوق في الرياضيات البحتة

للصف الثاني الثانوي العلمي
الفصل الدراسي الأول

إعداد الأستاذ
السيد عبد الكريم عرابي
موجه رياضيات



أولاً : الجبر

(١) الدوال الحقيقية

(٢) الاسس

(٣) اللوغاريتمات

$$3x^2 - 2xy + c$$

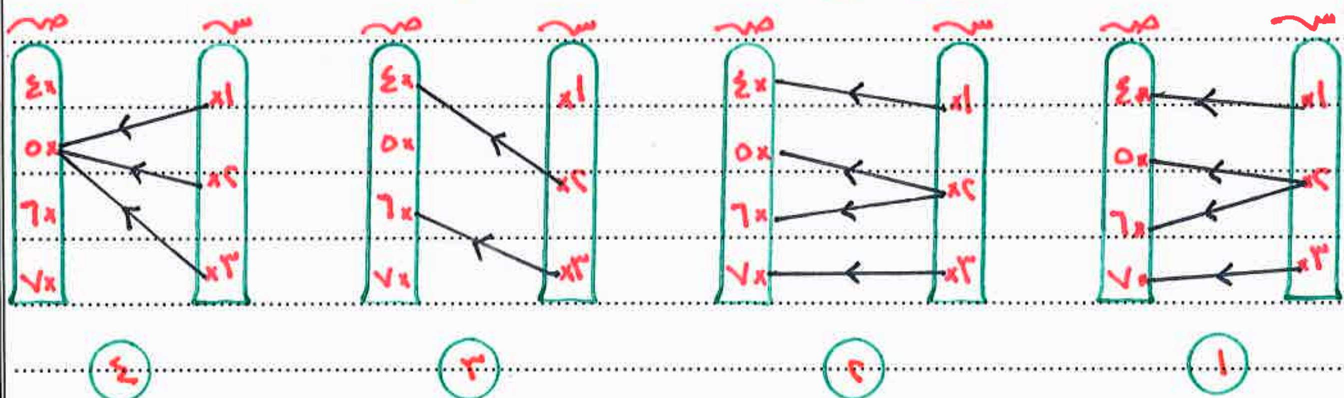
الدوال الحقيقية

الدالة: هي علاقة بين مجموعتين س ، ص بحيث كل عنصر من عناصر المجموعة س يرتبط بعنصر واحد فقط من المجموعة ص

* كتابة الدالة :- د : س ⟵ ص أو د(س) = ص

ملحوظة:
س تسمى مجال الدالة
ص تسمى المجال المقابل
المدى هو مجموعة صور عناصر المجال في المجال المقابل

تدريب ١: أي العلاقات التالية يمثل دالة من س ⟵ ص



تدريب ٢: العلاقات المبينة بمجموعة الأزواج المرتبة والتي لا تمثل دالة هي ...

أ) {(١، ٣) ، (٣، ٥) ، (٥، ٧) ، (٧، ٩)}
ب) {(٢، ٣) ، (٣، ٤) ، (٢، ١) ، (٣، ٥)}
جـ) {(٠، ٣) ، (١، ٣) ، (٢، ٣) ، (٣، ٣)}
د) {(−٣، ٥) ، (−١، ٥) ، (٠، ٥) ، (٢، ٥)}

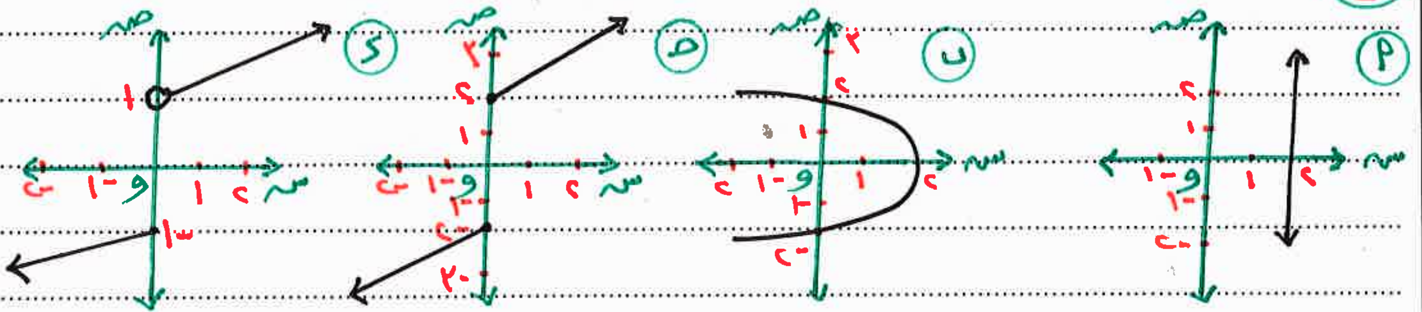
تدريب ٣: جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة في س ماعدا العلاقة :

أ) ص = ٣س + ١
ب) ص = س² − ٤
جـ) س = ص² − ٢
د) ص = جا س

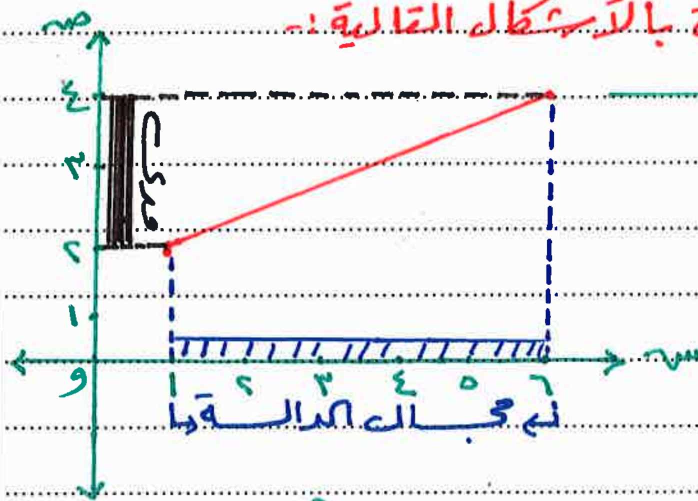


الرياضيات .. إسلوب حياه !

تدريب ٤ : جميع الأشكال التالية لا يمثل دالة ماعدا ....



تدريب ٥ : عين مجال ومدى الدوال الممثلة بالأشكال التالية :-



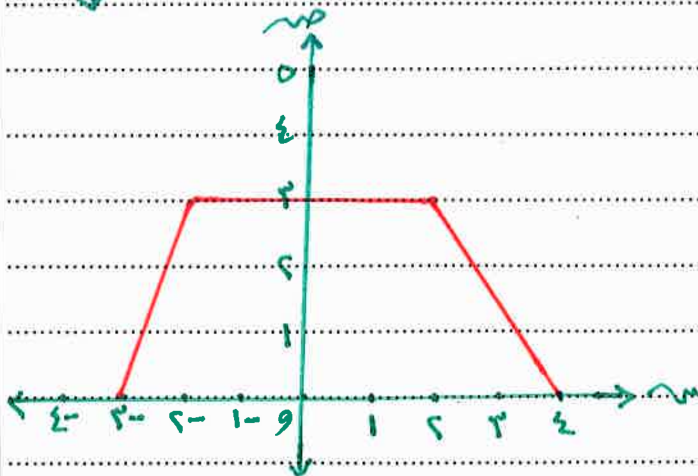
الحل

المجال ينصب على محور السينات

∴ المجال س ∋ [١ ، ٦]

المدى : ينصب على محور الصادات

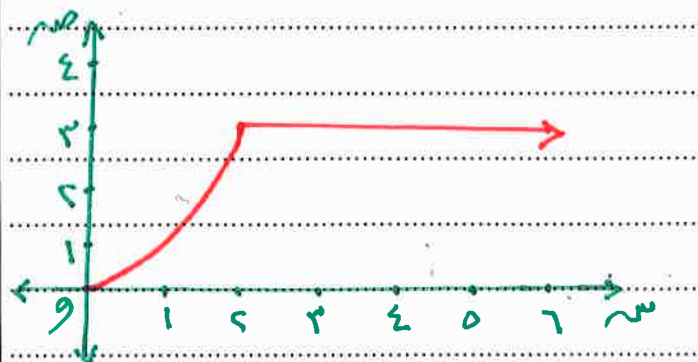
[٢ ، ٤]



(٢)

المجال :

المدى :



(٣)

المجال :

المدى :

العمليات على الدوال

تعيين مجال الدالة

① الدوال كثيرة الحدود

* مجال أي دالة كثيرة حدود هو ح

1. د(س) = ٤ .... ثابتة
2. د(س) = س + ٥ .... خطية
3. د(س) = س^٢ + ١ .... تربيعية
4. د(س) = س^٣ + ٤ .... تكعيبية

② الدوال الجذرية

د(س) = ^ن√ر(س) حيث ن ∈ ص^+ ، ن > ١

ر(س) دالة كثيرة حدود

1. إذا كانت ن عدد فردي ∴ مجالها ح
2. إذا كانت ن عدد زوجي ∴ نضع ر(س) ≥ ٠ ونوجد قيم س

③ الدالة الكسرية

د(س) = ر(س) / هـ(س) حيث ر ، هـ كثيرتي حدود

مجالها ح − {أصفار المقام}

تدريب ١ : عين مجال الدوال التالية:

1. د(س) = √س

نضع س ≥ ٠ ∴ المجال [٠ ، ∞[

2. د(س) = √(س − ٢)

نضع س − ٢ ≥ ٠

س ≥ ٢ ∴ المجال [٢ ، ∞[

3. د(س) = √(٣ − س)

نضع ٣ − س ≥ ٠

٣ ≥ س ∴ المجال]−∞ ، ٣]

4. د(س) = √(س^٢ − ٤)

نضع س^٢ − ٤ ≥ ٠ متباينة درجة ثانية

نبحث إشارة المقدار د(س) = س^٢ − ٤

جذري المعادلة هما −٢ ، ٢

مثل | عكس | مثل

موجب | سالب | موجب

]−∞ ، −٢[|]−٢ ، ٢[|]٢ ، ∞[

∴ المجال هو قيم س التي تجعل المقدار موجباً وصفر

∴ المجال ح −]−٢ ، ٢[

٥) $د(س) = \sqrt[3]{س + ٥}$

∵ دليل الجذر ③ فردي

∴ مجال الدالة هو ح

٦) $د(س) = \frac{س + ٥}{س}$

دالة كسرية ∴ أصفار المقام س = ٠

∴ المجال هو ح − {٠}

٧) $د(س) = \frac{س + ٢}{س - ٤}$

دالة كسرية ∴ أصفار المقام س = ٤

∴ المجال هو ح − {٤}

٨) $د(س) = \frac{س + ٧}{س^2 - ٤}$

دالة كسرية ∴ أصفار المقام : $س^2 - ٤ = ٠$

س = −٢ ، س = ٢

∴ المجال هو ح − {−٢ ، ٢}

٩) $د(س) = \frac{س + ٥}{س^2 + ٤}$

دالة كسرية ∴ أصفار المقام : $س^2 + ٤ = ٠$

∴ لا يوجد أصفار للمقام

∴ مجال الدالة ح

* إذا كانت د ، ر دالتين مجالهما م١ ، م٢ على الترتيب فإنه :

١) $(د \pm ر)(س) = د(س) \pm ر(س)$

٢) $(د . ر)(س) = د(س) \times ر(س)$

تكوين دوال حقيقية مجالها م١ ∩ م٢

٣) $(\frac{د}{ر})(س) = \frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث ر(س) ≠ ٠ ، مجالها م١ ∩ م٢ − {أصفار ر}

تدريب ٢ : عين مجال الدوال التالية

١) $د(س) = \sqrt{س - ٢} + ٧$

لاحظ د(س) عبارة عن مجموع دالتين

$د_1(س) = \sqrt{س - ٢}$ مجالها م١ = [٢ ، ∞[

$د_2(س) = ٧$ مجالها م٢ = ح

∴ مجال د(س) هو م١ ∩ م٢

= [٢ ، ∞[∩ ح

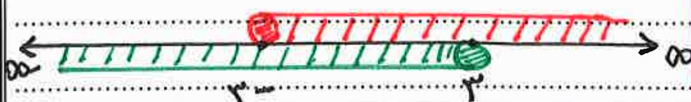
= [٢ ، ∞[

٢) $د(س) = \sqrt{س + ٣} + \sqrt{٣ - س}$

نضع س + ٣ ≥ ٠ ∴ م١ = [−٣ ، ∞[

نضع ٣ − س ≥ ٠ ∴ م٢ =]−∞ ، ٣]

∴ المجال م١ ∩ م٢ = [−٣ ، ٣]



③ $د(س) = \frac{س + ٢}{\sqrt{س + ٥}}$

لاحظ د(س) ليست دالة كسرية ولكنها عملية قسمة دالتين

مجال البسط $م_١ = ح$

مجال المقام $م_٢ = [-٥ ، ∞[$

أصفار المقام $\{-٥\}$

∴ مجال الدالة: $ح \cap [-٥ ، ∞[- \{-٥\}$

$=]-٥ ، ∞[$

④ $د(س) = \frac{\sqrt{س + ١}}{\sqrt{س - ٣}}$

مجال البسط $م_١ = [-١ ، ∞[$

مجال المقام $م_٢ = [٣ ، ∞[$

أصفار المقام $\{٣\}$

∴ مجال الدالة هو: $[-١ ، ∞[\cap [٣ ، ∞[- \{٣\}$

$=]٣ ، ∞[$

⑤ إذا كانت: $د : [-٥ ، ٣] \longrightarrow ح$

$د(س) = س^٢ + ٧$

$ر : [-١ ، ٧] \longrightarrow ح$

حيث $ر(س) = س^٢ - ٤$

أوجد $(\frac{د}{ر})(س)$ وعين المجال

لاحظ: $م_١ = [-٥ ، ٣]$

$م_٢ = [-١ ، ٧]$

∴ $(\frac{د}{ر})(س) = \frac{س^٢ + ٧}{س^٢ - ٤}$

مجالها: $م_١ \cap م_٢ - \{-٢ ، ٢\}$

$= [-١ ، ٣] - \{-٢ ، ٢\}$

تدريب للطلبة

① مجال الدالة $د(س) = س^٢ + ٣$ هو .....

(أ) $\{-٣\}$ (ب) $ح - \{-٣\}$ (جـ) $[-٣ ، ∞[$ (د) $ح$

② مجال الدالة $د(س) = \sqrt{س + ٣}$ هو

(أ) $\{-٣\}$ (ب) $ح - \{-٣\}$ (جـ) $[-٣ ، ∞[$ (د) $ح$

③ مجال الدالة $د(س) = \sqrt[٣]{س + ٣}$ هو

(أ) $\{-٣\}$ (ب) $ح - \{-٣\}$ (جـ) $[-٣ ، ∞[$ (د) $ح$

④ مجال الدالة: $د(س) = \sqrt{س - ٤} + ٧$ هو

(أ) $ح$ (ب) $[٤ ، ∞[$ (جـ) $]٤ ، ∞[$ (د) $]-∞ ، ٤[$

⑤ مجال الدالة $د(س) = \frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٥}$ هو

(أ) $ح - \{٥\}$ (ب) $[٢ ، ∞[$ (جـ) $[٢ ، ∞[- \{٥\}$ (د) $]٢ ، ∞[- \{٥\}$

تركيب دالتين

إذا كانت د ، ر دالتين فإن تركيب الدالة د مع الدالة ر ينتج دالة جديدة يرمز لها (د∘ر) أي (د∘ر)(س) = د(ر(س))

خطوات تعيين المجال

١) نوجد مجال ر م١
٢) نوجد مجال الدالة بعد التركيب م٢
٣) المجال المطلوب : .... م١ ∩ م٢

ملحوظة: شرط تركيب (د∘ر) أن يكون مدى الدالة ر ∩ مجال الدالة د ≠ ∅

تدريب ١: إذا كانت: د(س) = ٢س + ١ ، ر(س) = س² − ٣ أوجد
① (د∘ر)(س) ② (ر∘د)(س)

الحل

① (د∘ر)(س) = د[ر(س)]
= د(س² − ٣)
نروح للدالة د ونعوض عن س بـ (س² − ٣)
= ٢(س² − ٣) + ١
∴ (د∘ر)(س) = ٢س² − ٥

② (ر∘د)(س) = ر(د(س))
= ر(٢س + ١)
= (٢س + ١)² − ٣
∴ (ر∘د)(س) = ٤س² + ٤س − ٢

تدريب ٢: إذا كانت د(س) = س² + ٦ ، ر(س) = ٣ س أوجد:
① (د∘ر)(٣)
② قيم س التي تجعل (د∘ر)(س) = ٤٢

الحل

① (د∘ر)(٣) = د(ر(٣))
نوجد ر(٣) = ٣ × ٣ = ٩
∴ (د∘ر)(٣) = د(٩)
نوجد د(٩) = (٩)² + ٦ = ٨٧
∴ (د∘ر)(٣) = ٨٧

② ∵ (د∘ر)(س) = د(ر(س))
= د(٣س)
∴ (د∘ر)(س) = ٩س² + ٦
∴ ٤٢ = ٩س² + ٦
∴ س² = ٤ ⟸ س = ±٢

تدريب ٣: إذا كانت: د(س) = √س ، ر(س) = س² فإن: مجال (ر∘د) =
(أ)]−∞، ٢] (ب) [٠، ∞[
(ج) ح+ (د) ح

الحل

① نوجد مجال د .... م١ = [٠، ∞[
② نوجد (ر∘د)(س)

(م∘د)(س) = م(د(س))

= م(√س)

= (√س)²

= س مجالها م₂ = ح

∴ المجال هو : م₂ ∩ م₁

= [٠، ∞[∩ ح

= [٠، ∞[

تدريب ٤

إذا كانت د(١) = ٤ ، م(٤) = ٧ فإن: (م∘د)(١) =

(أ) ١ (ب) ٤

(ج) ٧ (د) ١١

الحل

∵ (م∘د)(١) = م(د(١))

= م(٤)

∴ (م∘د)(١) = ٧

تدريب ٥

إذا كانت د(س) = ∛س ، م(س) = س³ فإن (د∘م)(س) =

(أ) س (ب) س³

(ج) ∛س (د) |س|

الحل

(د∘م)(س) = د(م(س))

= د(س³)

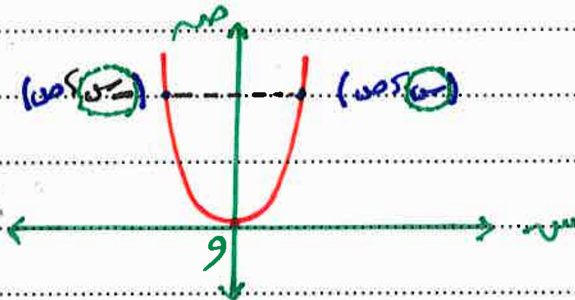
= ∛(س³)

∴ (د∘م)(س) = س

الدوال الزوجية والدوال الفردية

(١) يقال أن الدالة د **زوجية** إذا كانت:

د(-س) = د(س) لكل س ، -س ∈ للمجال



لكل (س، ص) ∈ د فإن: (-س، ص) ∈ د

أي: منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات

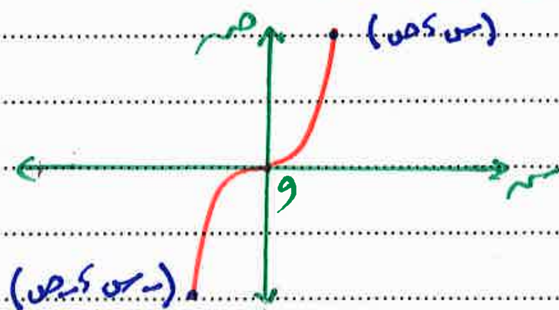
لاحظ لكي تكون الدالة زوجية:

(س ، ص)

(-س ، ص)

(٢) يقال للدالة د أنها **فردية** إذا كانت:

د(-س) = -د(س) لكل س ، -س ∈ للمجال



لكل (س، ص) ∈ د

فإن (-س، -ص) ∈ د

المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

ملاحظات

① عند بحث نوع الدالة لازم يكون لصدين س ، −س ∈ مجال الدالة بمعنى يكون المجال ح أو [−م ، م] أو]−م ، م[

② إذا كان: د(−س) ≠ د(س) ≠ −د(س) فإن الدالة ليست زوجية وليست فردية

③ من خواص الدوال المثلثية سابقاً:

* جا(−س) = −جا س ……… فردية
* جتا(−س) = جتا س ……… زوجية
* ظا(−س) = −ظا س ……… فردية

تدريب ١ ابحث نوع كل من الدوال التالية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

① د(س) = $س^2$ + جتا س

د(−س) = $(−س)^2$ + جتا(−س)

د(−س) = $س^2$ + جتا س

∴ د(−س) = د(س) ……… زوجية

② د(س) = $س^3$ − جا س

د(−س) = $(−س)^3$ − جا(−س)

د(−س) = $−س^3$ + جا س

∴ د(−س) = −د(س) ……… فردية

③ د(س) = $س^3$ + $س^2$ + ظا س

د(−س) = $(−س)^3$ + $(−س)^2$ + ظا(−س)

= $−س^3$ + $س^2$ − ظا س

∴ د(−س) ≠ د(س) ≠ −د(س)

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

④ د(س) = $س^2$ جتا س

د(−س) = $(−س)^2$ × جتا(−س)

د(−س) = $س^2$ جتا س ……… زوجية

⑤ د(س) = س جتا س

د(−س) = (−س) × جتا(−س)

= −س جتا س

∴ د(−س) = −د(س) ……… فردية

⑥ د(س) = $\frac{جتا س}{س^2 + 7}$

د(−س) = $\frac{جتا(−س)}{(−س)^2 + 7}$

د(−س) = $\frac{جتا س}{س^2 + 7}$ ……… زوجية

⑦ د(س) = $\sqrt{س − 3}$

∴ مجال الدالة [٣ ، ∞[

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

⑧ إذا كانت د : [-٣ ، ٤] ⟵ ح حيث
د(س) = س^٢ + ٥

∵ المجال هو [-٣ ، ٤]
∵ -٤ ∉ للمجال
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

خواص هامة

إذا كانت: د١ ، د٢ دالة زوجية
، ر١ ، ر٢ دالة فردية

① د١ ± د٢ تكون زوجية
② ر١ ± ر٢ تكون فردية
③ د١ ± ر١ ليست زوجية وليست فردية
④ (د١ × د٢) ، $\frac{د_1}{د_2}$ تكون زوجية
⑤ (ر١ × ر٢) ، $\frac{ر_1}{ر_2}$ تكون زوجية
⑥ (د١ × ر١) ، $\frac{د_1}{ر_1}$ تكون فردية

الخلاصة

① زوجية ± زوجية = زوجية
② فردية ± فردية = فردية
③ زوجية × ÷ زوجية = زوجية
④ فردية × ÷ فردية = زوجية
⑤ زوجية × ÷ فردية = فردية

تدريب للطلبة

① الدالة الزوجية من بين الدوال التالية هي
(أ) د(س) = س^٣ (ب) د(س) = جاس
(ج) د(س) = س جتاس (د) د(س) = س جاس

② الدالة الفردية من بين الدوال التالية هي
(أ) د(س) = س^٤ جاس (ب) د(س) = ظا^٤ س
(ج) د(س) = جتاس (د) د(س) = ١

③ إذا كانت الدالة د دالة زوجية في الفترة [أ ، ب] فإن ب =
(أ) أ (ب) -أ
(ج) ٢أ (د) أ^٢

④ إذا كانت د دالة زوجية ، ٢ ∈ مجال د فإن: د(٢) + د(-٢) =
(أ) صفر (ب) ٤
(ج) ٢ (د) ٢ د(٢)

⑤ نوع الدالة د(س) = $\frac{جاس}{س}$ هو
(أ) زوجية (ب) فردية
(ج) لا زوجية ولا فردية (د) زوجية وفردية

الرياضيات ...
فكر - فهم - تطبيق

الدالة الأحادية

الدالة د : س ⟵ ص تسمى دالة أحادية

إذا كان لكل أ ، ب ∈ س ، د(أ) = د(ب)

فإن : أ = ب

أو : لكل أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب

فإن : د(أ) ≠ د(ب)

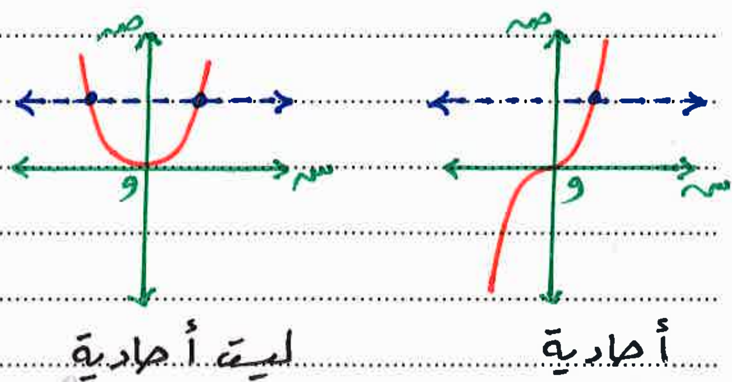
* خطوات الدالة الأحادية

1) نوجد : د(أ) ، د(ب)
2) نضع : د(أ) = د(ب)
3) نختصر : بعد الاختصار إذا كان :

أ = ب تكون أحادية

أ ≠ ب تكون ليست أحادية

* بيانياً : باستخدام الخط الأفقي



أحادية ليست أحادية

تدريب 1 : بين أي الدوال التالية أحادية وأيها ليست أحادية.

1) د(س) = ٢س − ٣

1) د(أ) = ٢أ − ٣ ، د(ب) = ٢ب − ٣
2) نضع : ٢أ − ٣ = ٢ب − ٣
3) نختصر : ٢أ = ٢ب

∴ أ = ب دالة أحادية

2) د(س) = س^{2} + ١

1) نوجد : د(أ) = أ^{2} + ١ ، د(ب) = ب^{2} + ١
2) نضع : أ^{2} + ١ = ب^{2} + ١
3) نختصر : أ^{2} = ب^{2}

∴ أ = ± ب ليست أحادية

3) د(س) = $\frac{1}{\text{س}+3}$

1) نوجد : د(أ) = $\frac{1}{\text{أ}+3}$ ، د(ب) = $\frac{1}{\text{ب}+3}$
2) نضع : $\frac{1}{\text{أ}+3}$ = $\frac{1}{\text{ب}+3}$
3) نختصر : أ + ٣ = ب + ٣

أ = ب أحادية

اللهم إن كان من توفيق فمن الله

وإن كان من خطأ أو نسيان فمني

والشيطان ...



دايما فى العلالى

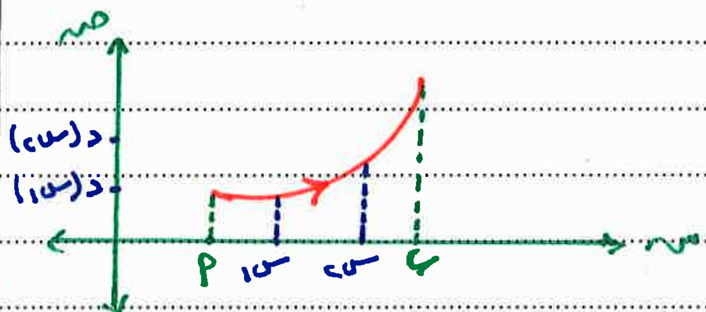
٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧

٠١١١١٩٥٤٨٠٠

إطراد الدالة

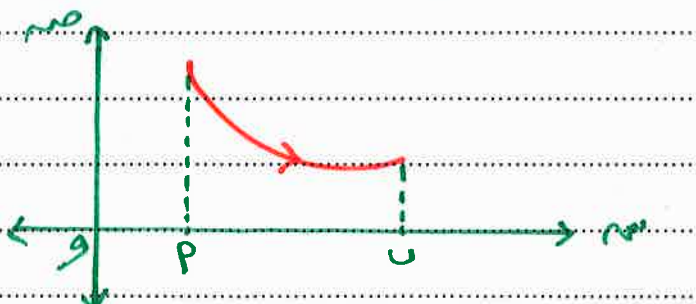
تزايد الدالة

يقال للدالة د أنها تزايدية في الفترة]أ ، ب[إذا كان لكل $س_١ ، س_٢ \in$]أ ، ب[حيث $س_٢ > س_١$ فإن: $د(س_٢) > د(س_١)$



تناقص الدالة

يقال للدالة د أنها تناقصية في]أ ، ب[إذا كان لكل $س_١ ، س_٢ \in$]أ ، ب[حيث $س_٢ > س_١$ فإن: $د(س_٢) < د(س_١)$



ثبوت الدالة

يقال للدالة د أنها ثابتة في]أ ، ب[إذا كان لكل $س_١ ، س_٢ \in$]أ ، ب[حيث $س_٢ > س_١$ فإن: $د(س_٢) = د(س_١)$

١ الدالة الثابتة

* الصورة العامة: د(س) = أ حيث أ $\in$ ح
* التمثيل البياني: خط مستقيم // محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، أ)
* المجال: ح
* المدى: {أ}
* الاطراد: ثابتة على مجالها ليست أحادية

تدريب ١

١) إذا كانت: د(س) = ٩ فإن مجال د هو

(أ) ح (ب) $ح^+$
(جـ) {٩} (د) ح − {٩}

٢) مدى الدالة د(س) = ٣ هو ....

(أ) ح (ب) $ح^+$
(جـ) {٣} (د) ح − {٣}

٣) الدالة د(س) = −٤ تمثل بيانياً بخط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة ....

(أ) (٠ ، ٤) (ب) (−٤ ، ٠)
(جـ) (٠ ، −٤) (د) (٤ ، ٠)

٤) مدى الدالة د(س) = $\begin{cases} ٢ & س > ٠ \\ -٣ & س < ٠ \end{cases}$ هو ....

(أ) ح − {٠}　　(ب) {−٣ ، ٢ ، ٢}

(ج) ح − {−٣ ، ٢ ، ٢}　　(د) ح

٥) الدالة د : د(س) = { ٢ ، س > ٠ ؛ −٢ ، س < ٠ }

متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٢ ، ٠)　　(ب) (−٢ ، ٠)

(ج) (٢ ، −٢)　　(د) (٠ ، ٠)

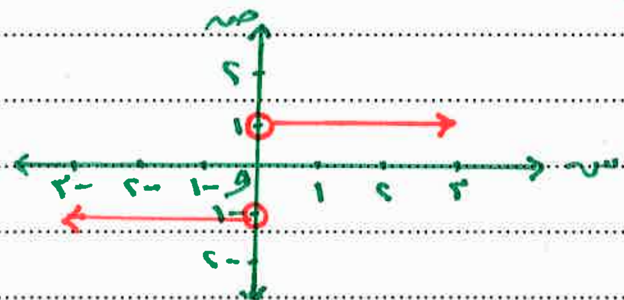
٦) مجال الدالة د(س) = { ٤ ، س > ١ ؛ −٤ ، س < ١ }

هو ....

(أ) ح　　(ب) ح − {٠}

(ج) ح − {١}　　(د) {−٤ ، ٤}

٧) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



(أ) {١}　　(ب) {١ ، −١}

(ج) {−١}　　(د) ح

٢) الدالة الخطية

* الصورة العامة : د(س) = أس + ب حيث أ ≠ ٠
* المجال : ح
* المدى : ح
* الاطراد : أ > ٠ تزايدية ، أ < ٠ تناقصية
* النوع : ليست زوجية وليست فردية إلا إذا كانت ب = ٠ فردية
* الرسم : خط مستقيم يقطع المحورين أو يمر بنقطة الأصل (ب = ٠)

تدريب ٢ : ارسم الشكل البياني للدالة د حيث

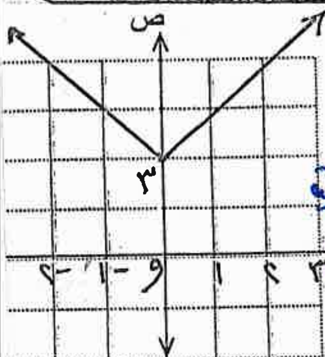
د(س) = { س + ٣ ، س ≥ ٠ ؛ −س + ٣ ، س < ٠ }

ومبيناً المدى - الاطراد - النوع

الحل

ص = س + ٣　　|　　ص = −س + ٣

س	٠	١	٢	٠	−١	−٢
ص	٣	٤	٦	٣	٤	٦



المجال : ح

المدى : [٣ ، ∞[

الاطراد :]−∞ ، ٠] تناقصية

[٠ ، ∞[تزايدية

النوع : زوجية

الدالة ليست أحادية

حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

تعريف: القيمة المطلقة للعدد الحقيقي س (تسمى مقياس العدد) ويرمز له |س|
معناه أكبر العددين س ، −س

$$|س| = \begin{cases} س & س \geq 0 \\ -س & س < 0 \end{cases}$$

خواص مقياس العدد الحقيقي

1. $|س| \geq 0$
2. $|س| = |-س|$
3. $|أ - س| = |س - أ|$
4. إذا كان : $|س| = أ$ حيث $أ \geq 0$ ، فإن $س = \pm أ$
5. إذا كان : $|س| = |أ|$ فإن : $س = \pm أ$
6. $\sqrt{س^2} = |س|$ لأي عدد حقيقي س
7. $|س|^2 = س^2$ لأي عدد حقيقي س
8. $|س ص| = |س| \times |ص|$
9. $|س + ص| \leq |س| + |ص|$



إعادة تعريف المقياس

1) ترتيب س داخل المقياس وجعلها موجبة
2) نوجد صفر المقياس [نجعل ما بداخل المقياس = ٠]
3) نصير ترتيب المقياس على فترتين : | دالة | = { + (دالة) ، س ≥ صفر المقياس ؛ − (دالة) ، س < صفر المقياس }

حل معادلة المقياس

حل جبري: باستخدام إعادة تعريف المقياس أو يوجد طرق أخرى

حل بياني: نرسم دالة الطرف الأيمن ونرسم دالة الطرف الأيسر ونقط التقاطع نوجد الإحداثي السيني لها

تدريب 1: أوجد مجموعة الحل في ح

1) |٢س − ١| = ٥

الحل

س ≥ ½	س < ½
٢س − ١ = ٥	−٢س + ١ = ٥
٢س = ٦	−٢س = ٤
س = ٣	س = −٢

م.ح = {٣ ، −٢}

2) |٢س − ٣| = ٧

الحل

س ≥ ٣/٢	س < ٣/٢
٢س − ٣ = ٧	−٢س + ٣ = ٧
٢س = ١٠	−٢س = ٤
س = ٥	س = −٢

م.ح = {٥ ، −٢}

3) |س − ٢| + ٢س = ٧

الحل

س ≥ ٢	س < ٢
س − ٢ + ٢س = ٧	−س + ٢ + ٢س = ٧
٣س = ٩	س = ٥
س = ٣	∴ س = ٥ ∉] −∞ ، ٢ [

∴ م.ح = {٣}

ملحوظة: إذا كان |أس + ب| = جـ حيث جـ ∈ ح⁻ فإن م.ح = ∅

٤) |س − ٣| + ٥ = ٠

الحل

|س − ٣| = −٥ ∈ ح⁻

∴ م.ح = ∅

٥) |س − ٢| = |س − ٦|

الحل

س + ٢ = س − ٦ ⟸ ٢ = −٦ مرفوض

س + ٢ = −س + ٦ ⟸ ٢س = ٤ ⟸ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

٦) $\sqrt{س^2 - ٢س + ١}$ = ٤

الحل

$\sqrt{(س - ١)^2}$ = ٤

|س − ١| = ٤

س ≥ ١: س − ١ = ٤ ⟸ س = ٥

س < ١: −س + ١ = ٤ ⟸ س = −٣

م.ح = {٥، −٣}

تدريب ٢: اختر الإجابة الصحيحة

١) مجموعة حل المعادلة: |س − ٢| = ٥ في ح هي

أ) {٧} ب) {−٣} جـ) {٧، −٣} د) [−٣، ٧]

٢) مجموعة حل المعادلة |٥س − ١| + ٤ = ١ في ح هي

أ) {−٤/٥، ٦/٥} ب) ∅ جـ) {٦/٥} د) {−٤/٥}

٣) مجموعة حل المعادلة: |س| + س = ٠ هي

أ) {٠} ب)]−∞، ٠] جـ)]−∞، ٠[د) ∅

٤) مجموعة حل المعادلة |٢س − ٤| = |س + ١| هي

أ) {١، ٥} ب) {٥، −١} جـ) {١، −٥} د) {−٥، −١}

٥) مجموعة حل المعادلة: |٢س + ٥| = ٧ في ح هي

أ) {١، −٦} ب) {٦} جـ) {١} د) {−١}

٦) العبارة الخطأ فيما يلي هي

أ) |س ص| = |س| × |ص| ب) |−س| = |س| جـ) |س + ص| = |س| + |ص| د) $\sqrt{س^2}$ = |س|

متباينة المقياس

① إذا كان $|\text{س}| \leq \text{أ}$ فإن: $-\text{أ} \leq \text{س} \leq \text{أ}$

② إذا كان $|\text{س}| \geq \text{أ}$ فإن: $\text{س} \geq \text{أ}$ ، $\text{س} \leq -\text{أ}$

$-٢ \leq ٢\text{س} \leq ٨ \quad \div ٢$

$-١ \leq \text{س} \leq ٤$

$\text{م.ح} = [-١ ، ٤]$

تدريب ١ : أوجد مجموعة الحل في ح

① $|\text{س} - ٢| < ٣$

الحل

$-٣ < \text{س} - ٢ < ٣$ (بإضافة ٢)

$-١ < \text{س} < ٥$

$\text{م.ح} =]-١ ، ٥[$

② $|٢\text{س} + ١| \leq ٧$

الحل

$-٧ \leq ٢\text{س} + ١ \leq ٧ \quad (-١)$

$-٨ \leq ٢\text{س} \leq ٦ \quad \div ٢$

$-٤ \leq \text{س} \leq ٣$

$\therefore \text{م.ح} = [-٤ ، ٣]$

③ $|٣ - ٢\text{س}| \leq ٥$

الحل

نرتب المقياس: $|٢\text{س} - ٣| \leq ٥$

$-٥ \leq ٢\text{س} - ٣ \leq ٥$ (بإضافة ٣)

④ $\sqrt{٤\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٩} < ٩$

الحل

$\sqrt{(٢\text{س} - ٣)^٢} < ٩$

$|٢\text{س} - ٣| < ٩$

$-٩ < ٢\text{س} - ٣ < ٩$ (بإضافة ٣)

$-٦ < ٢\text{س} < ١٢ \quad \div ٢$

$-٣ < \text{س} < ٦$

$\text{م.ح} =]-٣ ، ٦[$

⑤ $|\text{س} - ١١| - ٣ < ١ - |\text{س} - ١١|$

الحل

$|\text{س} - ١١| + |\text{س} - ١١| < ١ + ٣$

$٢|\text{س} - ١١| < ٤ \quad \div ٢$

$|\text{س} - ١١| < ٢$

$-٢ < \text{س} - ١ < ٢$ (بإضافة ١)

$-١ < \text{س} < ٣$

$\text{م.ح} =]-١ ، ٣[$

⑥ $|س - ٢| > ٥$

الحل

$س - ٢ > ٥$ $س - ٢ < -٥$

$س > ٧$ $س < -٣$



م.ح = ح − [−٣ ، ٧]

⑦ $|٢س - ٥| \geq ٩$

الحل

$٢س - ٥ \geq ٩$ $٢س - ٥ \leq -٩$

$٢س \geq ١٤$ $٢س \leq -٤$

$س \geq ٧$ $س \leq -٢$



م.ح = ح −]−٢ ، ٧[

⑧ $\sqrt{(س+٢)^٢} + |٢س + ٤| \geq ٦$

الحل

$|س + ٢| + ٢|س + ٢| \geq ٦$

$٣|س + ٢| \geq ٦$ ÷ ٣

$|س + ٢| \geq ٢$

$س + ٢ \geq ٢$ $س + ٢ \leq -٢$

$س \geq ٠$ $س \leq -٤$

م.ح = ح −]−٤ ، ٠[

⑨ $\frac{١}{|٣س - ١١|} \geq ٥$

الحل

$|٣س - ١١| \leq \frac{١}{٥}$

$-\frac{١}{٥} \leq ٣س - ١١ \leq \frac{١}{٥}$

$\frac{٥٤}{٥} \leq ٣س \leq \frac{٥٦}{٥}$

$\frac{١٨}{٥} \leq س \leq \frac{٥٦}{١٥}$

م.ح = $[\frac{١٨}{٥} ، \frac{٥٦}{١٥}] - \{\frac{١١}{٣}\}$

تدريب ٢ — إختر الإجابة الصحيحة

① مجموعة حل المتباينة $|٢ - ٣س| \geq ٧$ هي

Ⓐ $[-\frac{٥}{٣} ، ٣]$ Ⓑ ح − $[-\frac{٥}{٣} ، ٣]$

Ⓒ ح − $]-\frac{٥}{٣} ، ٣[$ Ⓓ ϕ

② إذا كان: $|س| \leq أ$ ، $أ \in ح^+$ فإن س ∈

Ⓐ ح − $[-أ ، أ]$ Ⓑ $[-أ ، أ]$

Ⓒ ح − $]-أ ، أ[$ Ⓓ $]-أ ، أ[$

③ مجموعة حل المتباينة $|س - ٢| + |٢ - س| \leq ٦$ في ح هو

Ⓐ $[-١ ، ٥]$ Ⓑ $]-١ ، ٥[$

Ⓒ ح − $[-١ ، ٥]$ Ⓓ ح − $]-١ ، ٥[$

التمثيل البياني للدوال

الدوال

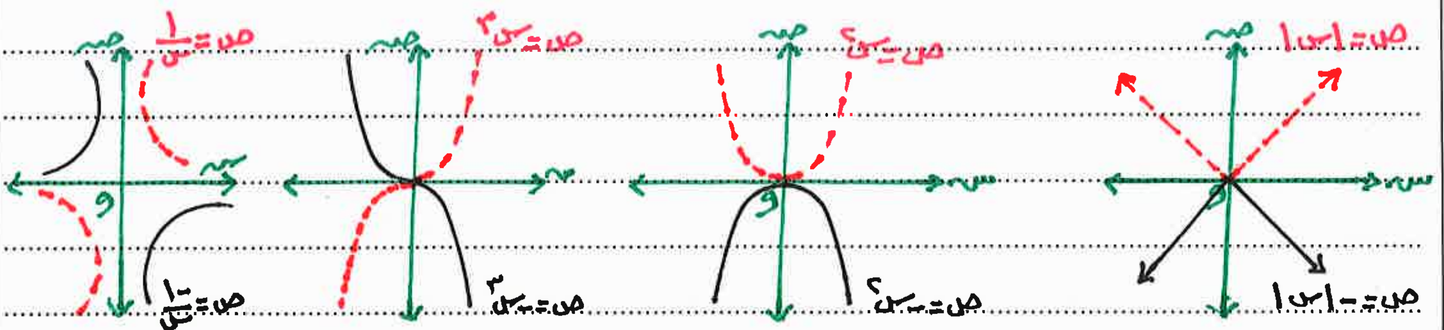
- مقياس: ص = |س|
- تربيعية: ص = $س^2$
- تكعيبية: ص = $س^3$
- كسرية: ص = $\frac{1}{س}$

ترتيب التحويلات على المنحنى ص = د(س) للحصول على المنحنى ص = −د(س + أ) + ب

(١) إنعكاس في محور السينات (٢) إزاحة أفقية (٣) إزاحة رأسية

(١) إنعكاس منحنى الدالة في محور السينات

لأى دالة د يكون المنحنى ص = −د(س) هو نفس المنحنى ص = د(س) بالانعكاس في محور السينات



(٢) الإزاحة الأفقية:

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د(س + أ) ، أ ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د(س) بإزاحة أفقية قدرها |أ| وحدة طول

في اتجاه:
- $\overrightarrow{وس}$ يميناً عندما أ < ٠
- $\overleftarrow{وس}$ يساراً عندما أ > ٠

(٣) الإزاحة الرأسية:

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د(س) + أ ، أ ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د(س) بإزاحة رأسية قدرها |أ| وحدة طول

في اتجاه:
- $\overrightarrow{وص}$ للأعلى عندما أ > ٠
- $\overleftarrow{وص}$ للأسفل عندما أ < ٠

التمثيل البياني لدالة المقياس

د(س) = |س|

دالة المقياس في الصورة القياسية لها تمثيل بيانيًا بشعاعين لهما نفس نقطة البداية

نقطة البداية (٠، ٠)

المجال: ح

المدى: [٠، ∞[

الاطراد:]-∞، ٠] تناقصية

[٠، ∞[تزايدية

النوع: زوجية

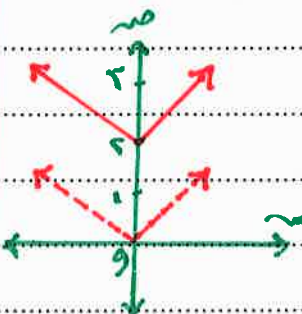
الدالة: ليست أحادية

تدريب ١: باستخدام منحنى الدالة د(س) = |س| ارسم منحنى الدوال التالية ومبينًا: المجال - المدى - الاطراد - النوع - التماثل

① د(س) = |س| + ٢

الحل

نقطة البداية: (٠، ٢) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه و ص



المدى:

الاطراد:

النوع:

معادلة محور التماثل:

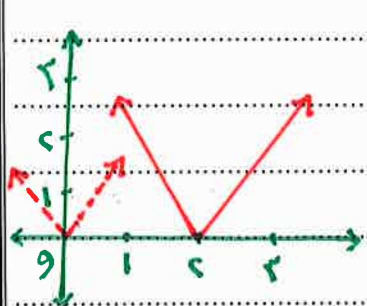
② د(س) = |س - ٢|

الحل

نقطة البداية: (٢، ٠) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه و س

المدى:

الاطراد:



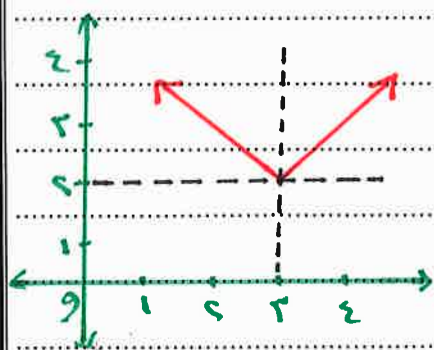
النوع:

معادلة محور التماثل:

③ د(س) = |س - ٣| + ٢

الحل

نقطة البداية: (٣، ٢) إزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه و س ثم إزاحة مقدار ٢ وحدة في إتجاه و ص



المدى:

الاطراد:

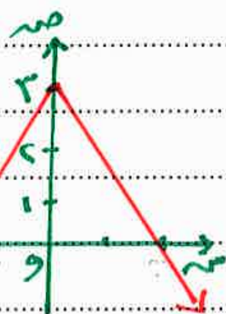
النوع:

معادلة محور التماثل:

٤) د(س) = ٣ − |س|

الحل

نقطة البداية: (٠ ، ٣) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه و ص←



المدى:

الاطراد:

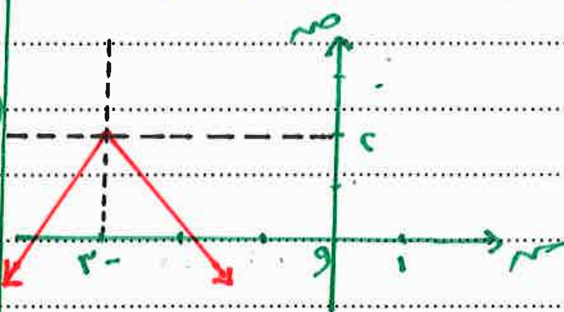
النوع:

معادلة التماثل:

٥) د(س) = ٢ − |س + ٣|

الحل

نقطة البداية: (−٣ ، ٢) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه و س← ثم إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و ص←



المدى:

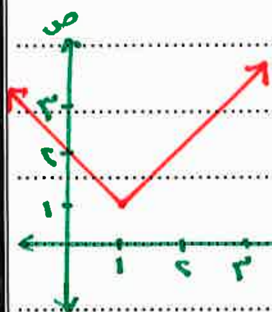
الإطراد:

النوع:

معادلة محور التماثل:

تدريب ٢ اختر الإجابة الصحيحة

١) في الشكل المقابل.. تكون الدالة تناقصية في الفترة ....



أ) $]-1, \infty[$ ب) $]0, 1[$

ج) $]-\infty, \infty[$ د) $]-\infty, 1[$

٢) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = ٣ − |س − ١| فإنها تكون تزايدية في الفترة ....

أ) $]-\infty, 3[$ ب) $]-\infty, 1[$

ج) $]1, \infty[$ د) $]3, \infty[$

٣) نقطة رأس المنحنى د(س) = |س + ٣| − ٢ هي ....

أ) $(3, 2)$ ب) $(-3, -2)$

ج) $(-3, 2)$ د) $(3, -2)$

٤) منحنى الدالة ر: ر(س) = |س + ٣| هو نفسه منحنى د(س) = |س| بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه ....

أ) و س← ب) و س←

ج) و ص← د) و ص←

٥) مدى الدالة د: د(س) = |س| − ٢ هو ....

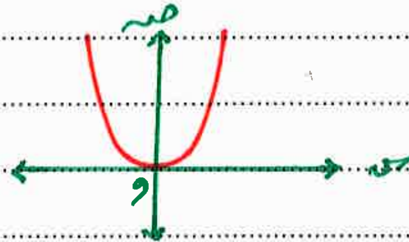
أ) $]0, \infty[$ ب) $[2, \infty[$

ج) $[0, \infty[$ د) $]2, \infty[$

الدالة التربيعية

$د(س) = س^2$

نقطة رأس المنحنى: (٠ ، ٠)



المدى: [٠ ، ∞[

الأطراد:]-∞ ، ٠[تناقصية

[٠ ، ∞[تزايدية

النوع: زوجية

محور التماثل: محور الصادات (س = ٠)

تدريب ١

باستخدام منحنى الدالة د(س) = س² إرسم منحنى الدوال التالية مبيناً المدى - الأطراد - النوع

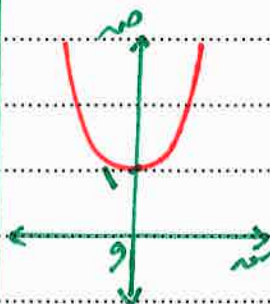
① $د(س) = س^2 + 1$

الحل

نقطة رأس المنحنى: (٠ ، ١) إزاحة مقدارها ١ في إتجاه وص

المدى:

الأطراد:



النوع:

معادلة محور التماثل:

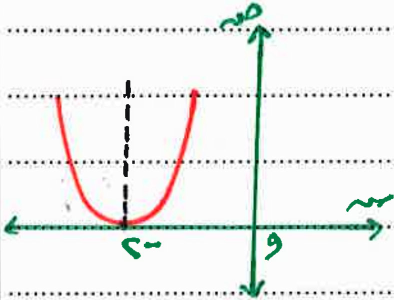
② $د(س) = (س + ٢)^2$

الحل

نقطة رأس المنحنى: (-٢ ، ٠) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه وس←

المدى:

الأطراد:



النوع:

معادلة التماثل:

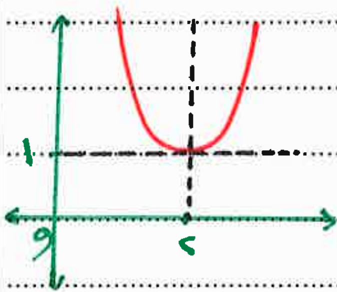
③ $د(س) = (س - ٢)^2 + 1$

الحل

نقطة رأس المنحنى: (٢ ، ١) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه وس ثم إزاحة مقدارها ١ في إتجاه وص

المدى:

الأطراد:



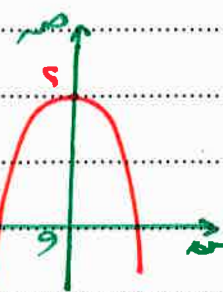
النوع:

معادلة التماثل:

④ $د(س) = ٣ - س^2$

الحل

نقطة رأس المنحنى: (٠ ، ٣) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٣ وحدات في إتجاه وص



المدى :

الإطراد :

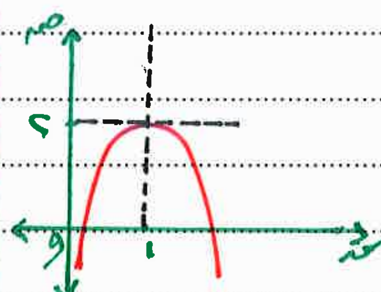
النوع :

معادلة محور التماثل :

⑤ $د(س) = ٢ - (س - ١)^٢$

الحل

نقطة رأس المنحنى : (١ ، ٢) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ١ وحدة في إتجاه و س ثم إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه و ص



المدى :

الاطراد :

النوع :

معادلة محور التماثل :

⑥ $د(س) = س^٢ - ٢س + ٣$

الحل

نجعل الدالة على الصورة القياسية

$د(س) = س^٢ - ٢س + ١ + ٣ - ١$

بإضافة وطرح (١) للدالة

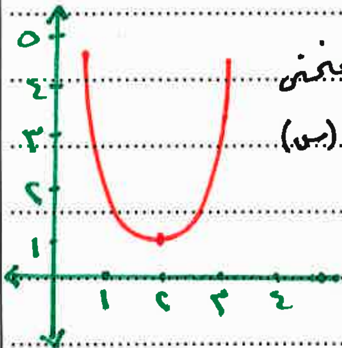
$د(س) = (س - ١)^٢ + ٢$

نقطة رأس المنحنى : (١ ، ٢) نكمل الحل

تدريب ٢

إختر الإجابة الصحيحة :

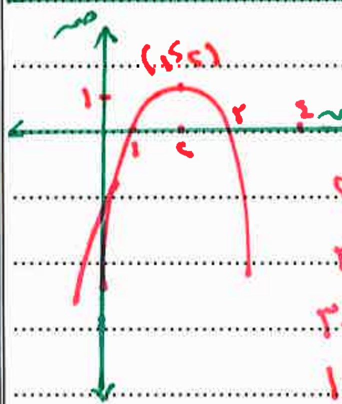
① الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة التربيعية ص = د(س) فإن قاعدة الدالة هي ....



(أ) $د(س) = (س - ١)^٢ + ٢$ (ب) $د(س) = (س - ٢)^٢ + ١$

(جـ) $د(س) = (س - ١)^٢ - ٢$ (د) $د(س) = (س - ٢)^٢ - ١$

② الشكل المقابل ..... المنحنى يمثل الدالة .....



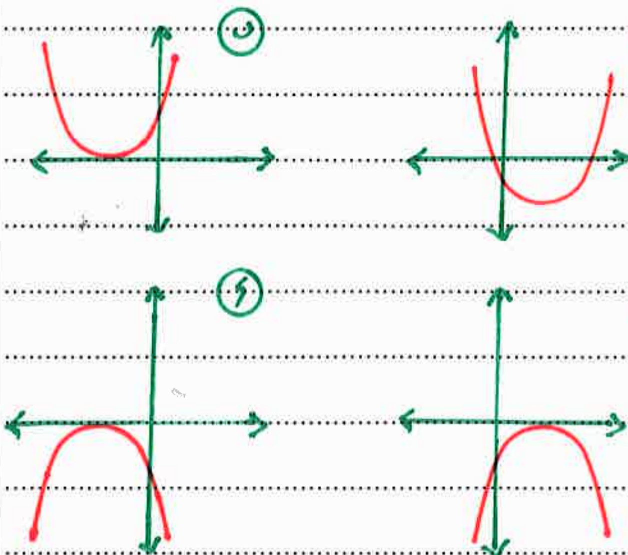
(أ) $د(س) = -(س - ١)^٢ + ٢$

(ب) $د(س) = -س^٢ + ٤س - ٣$

(جـ) $د(س) = -س^٢ - ٤س + ٣$

(د) $د(س) = -(س - ٢)^٢ - ١$

③ الشكل الذي يمثل منحنى الدالة : $د(س) = -(س - ١)^٢$ هو



الدالة التكعيبية

$د(س) = س^٣$

نقطة التماثل : (٠ ، ٠)

المدى : ح

الاطراد : تزايدية على ح

النوع : فردية



① $د(س) = س^٣ + ١$

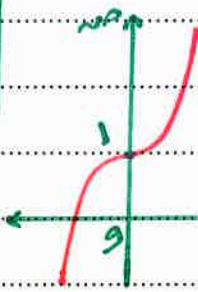
الحل

نقطة التماثل : (٠ ، ١) إزاحة مقدارها ١ في اتجاه و ص

المدى : ح

الاطراد : تزايدية على ح

النوع : ليست زوجية وليست فردية



② $د(س) = (س + ٢)^٣$

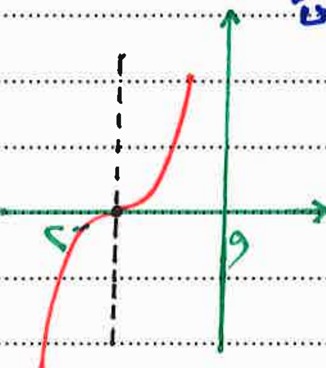
الحل

نقطة التماثل : (-٢ ، ٠) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و س

المدى :

الاطراد :

النوع :



③ $د(س) = (س - ٢)^٣ + ١$

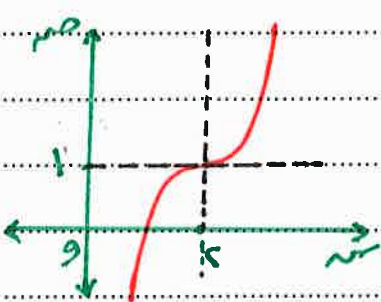
الحل

نقطة التماثل : (٢ ، ١) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و س ثم إزاحة مقدارها وحدة في اتجاه و ص

المدى :

الاطراد :

النوع :



④ $د(س) = ٢ - س^٣$

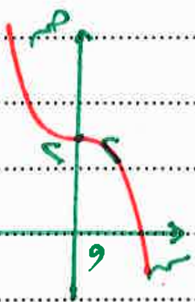
الحل

نقطة التماثل : (٠ ، ٢) إنعكاس على محور الصادات ثم إزاحة مقدارها ٢ في اتجاه و ص

المدى :

الاطراد :

النوع :



⑤ $د(س) = -(س - ٢)^٣$

الحل

نقطة التماثل : (٢ ، ٠) إنعكاس على محور الصادات ثم إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و س

دالة المقياس في صورة غير قياسية

لرسم دالة المقياس التي في صورة غير قياسية نتبع الآتي :

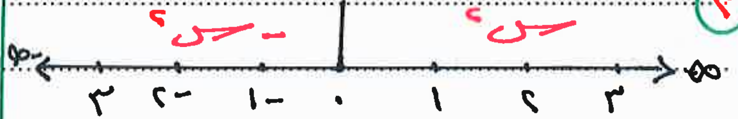
1) نوجد المجال
2) نعيد تعريفها على قاعدتين
3) نختصر كل قاعدة
4) نعمل جدول لكل قاعدة

(١) د(س) = س |س|

الحل

1) المجال : ح

2)





المدى : ح

الاطراد : تزايدية على ح

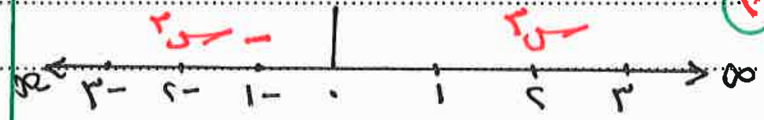
النوع : فردية

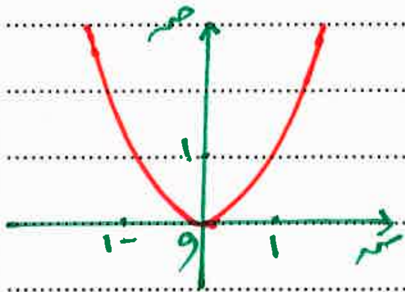
(٢) د(س) = س² |س|

الحل

1) المجال : ح

2)





المدى :

الاطراد :

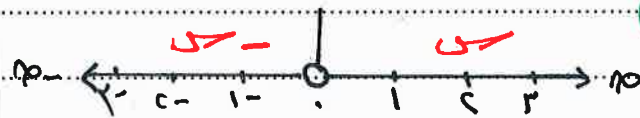
النوع :

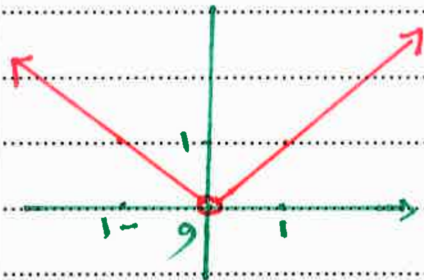
(٣) د(س) = س² / |س| حيث س ≠ ٠

الحل

1) المجال : ح - {٠}

2)





المدى :

الاطراد :

النوع :

(٤) د(س) = |س| / س حيث س ≠ ٠

الحل



الدالة الكسرية

$د(س) = \frac{1}{س}$ صورة قياسية

نقطة التماثل : (٠، ٠)

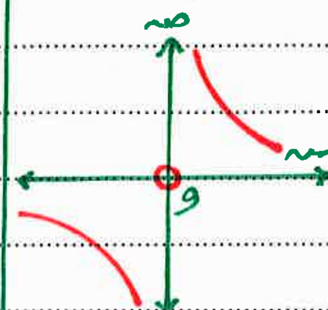
المجال : ح - {٠}

المدى : ح - {٠}

الاطراد :]-∞، ٠[تناقصية

]٠، ∞[تناقصية

النوع : فردية



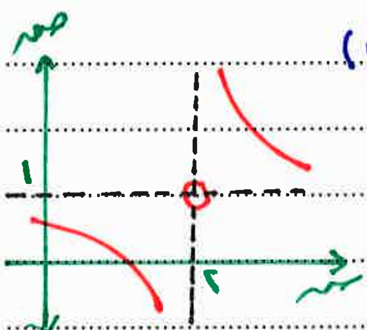
٣) $د(س) = \frac{1}{س - ٢} + ١$

نقطة التماثل : (٢، ١)

المجال :

المدى :

الاطراد :



١) $د(س) = \frac{1}{س} + ٢$

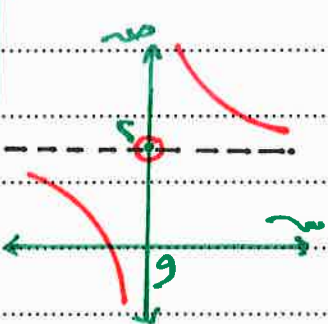
نقطة التماثل : (٠، ٢) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه و ص

المجال :

المدى :

الاطراد :

النوع :



٤) $د(س) = \frac{-1}{س}$

نقطة التماثل : (٠، ٠) إنعكاس على محور السينات

المجال : ح - {٠}

المدى : ح - {٠}

الاطراد :]-∞، ٠[تزايدية

]٠، ∞[تزايدية



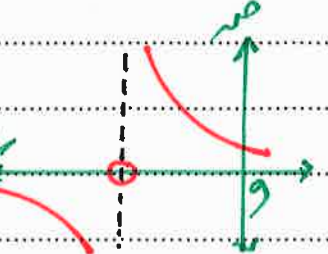
٢) $د(س) = \frac{1}{س + ٢}$

نقطة التماثل : (-٢، ٠) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه و س

المجال :

المدى :

الاطراد :



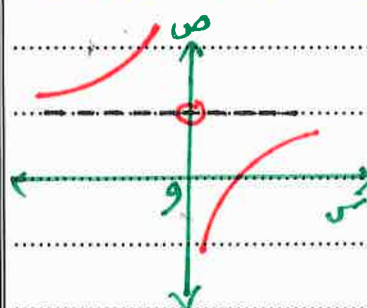
٥) $د(س) = ٣ - \frac{1}{س}$

نقطة التماثل : (٠، ٣) انعكاس على محور السينات

المجال :

المدى :

الاطراد :



الأسس الكسرية

تعريف (١) إذا كان: $ن \in ص^+ - \{1\}$ ، $أ \in ح$ فإن: $أ^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

(٢) إذا كان $م$ ، $ن$ عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك ، $ن > 1$ ، $\sqrt[ن]{أ} \in ح$

فإن: $أ^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{أ})^م = \sqrt[ن]{أ^م}$

ملحوظة إذا كان: $ن$ عدد زوجي ، $أ < 0$ فإن: $أ^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{أ} \notin ح$

مثال

(١) $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 \in ح$

(٢) $(-9)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-9} \notin ح$

خواص الجذور النونية

إذا كان: $أ$ ، $ب$ عددين حقيقيين ، $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ح$ فإن:

(١) $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$ (٢) $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$

تدريب ١

(١) $\sqrt[3]{27أ^6ب^9} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{أ^6} \times \sqrt[3]{ب^9} = 3أ^2ب^3$

(٢) $\sqrt[4]{81س^4ص^{16}} = \sqrt[4]{81} \times \sqrt[4]{س^4} \times \sqrt[4]{ص^{16}} = 3|س|ص^4$

قوانين الأسس

(١) $أ^{صفر} = 1$ (٢) $أ^ن \times أ^م = أ^{ن+م}$ (٣) $\frac{أ^م}{أ^ن} = أ^{م-ن}$

(٤) $(أ^م)^ن = أ^{مn}$ (٥) $(أب)^ن = أ^نب^ن$ (٦) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^ن = \frac{أ^ن}{ب^ن}$

تدريب ٢

(١) $\sqrt{س} \times \sqrt[3]{س} = س^{\frac{1}{2}} \times س^{\frac{1}{3}} = س^{\frac{5}{6}}$

(٢) $(\sqrt[5]{س})^{2} \times \sqrt[3]{س^{2}} = س^{\frac{2}{5}} \times س^{\frac{2}{3}} = س^{\frac{16}{15}}$

المعادلات الأسية

(١) **المعادلة : $س^{ن} = أ$** حيث $أ \in ح$ ، $ن \in ص^{+}$ لها ن من الجذور

المعادلة	عدد الجذور	عدد الجذور الحقيقية	عدد الجذور المركبة
① ن عدد زوجي			
$س^{ن} = أ$ ، $أ > ٠$	ن	جذران	(ن − ٢)
$أ < ٠$	ن	ليس لها جذور (صفر)	ن
② ن فردي			
$س^{ن} = أ$ ، $أ \neq ٠$	ن	واحد	(ن − ١)

تدريب ٢

(١) المعادلة $س^{3} = ٨$ عدد جذورها يساوي (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٢) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة $س^{4} = -١٦$ هو (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٤

(٢) **المعادلة : $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن $س = أ^{\frac{ن}{م}}$ بشرط م عدد فردي**

المعادلة : $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن $س = \pm أ^{\frac{ن}{م}}$ بشرط م عدد زوجي

تدريب ٣ : أوجد مجموعة الحل في ح

١) $\text{س}^{٤} = ٨١$

الحل

$\text{س} = \pm \sqrt[٤]{٨١} = \pm ٣$

$\therefore \text{م.ح} = \{\pm ٣\}$

٢) $\text{س}^{٥} = ٢٤٣$

الحل

$\text{س} = \sqrt[٥]{٢٤٣} = ٣$

$\text{م.ح} = \{٣\}$

٣) $٤\text{س}^{٥} = -١٢٨$

الحل

$\text{س}^{٥} = \frac{-١٢٨}{٤} = -٣٢$

$\therefore \text{س} = \sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$

$\text{م.ح} = \{-٢\}$

٤) $\text{س}^{\frac{٧}{٢}} = ١٢٨$

الحل

$\text{س} = (١٢٨)^{\frac{٢}{٧}} = ٤$

$\therefore \text{م.ح} = \{٤\}$

٥) $\text{س}^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$

الحل

$\text{س} = \pm (٨١)^{\frac{٣}{٤}} = \pm ٢٧$

$\therefore \text{م.ح} = \{\pm ٢٧\}$

٦) $\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}} = ١$

الحل

$\text{س}^{\frac{٢}{٥}} = ١$

$\text{س} = \pm (١)^{\frac{٥}{٢}} = \pm ١$

$\text{م.ح} = \{\pm ١\}$

٧) $(٣\text{س} + ٢)^{\frac{٣}{٤}} = ٨$

الحل

$٣\text{س} + ٢ = (٨)^{\frac{٤}{٣}}$

$٣\text{س} + ٢ = ١٦$

$\text{س} = \frac{١٤}{٣}$

$\text{م.ح} = \left\{\frac{١٤}{٣}\right\}$

تدريب ٤ : أوجد مجموعة الحل في ح

١) $\text{س}^{\frac{٢}{٤}} + \text{س}^{\frac{١}{٤}} - ١٢ = ٠$

الحل

$(\text{س}^{\frac{١}{٤}} + ٤)(\text{س}^{\frac{١}{٤}} - ٣) = ٠$

تحليل مقدار ثلاثي

$\therefore \text{س}^{\frac{١}{٤}} = -٤$ مرفوض

$\text{س}^{\frac{١}{٤}} = ٣ \Leftarrow \text{س} = ٣^{٤} = ٨١$

$\therefore \text{م.ح} = \{٨١\}$

٢) $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ٤\text{س}^{\frac{١}{٣}} + ٣ = ٠$

الحل

$(\text{س}^{\frac{١}{٣}} - ٣)(\text{س}^{\frac{١}{٣}} - ١) = ٠$

$\text{س}^{\frac{١}{٣}} = ٣ \Leftarrow \text{س} = ٢٧$

$\text{س}^{\frac{١}{٣}} = ١ \Leftarrow \text{س} = ١$

(3) $س^{\frac{4}{3}} - 10 س^{\frac{2}{3}} + 9 = 0$

الحل

$(س^{\frac{2}{3}} - 9)(س^{\frac{2}{3}} - 1) = 0$

$س^{\frac{2}{3}} = 9 \Leftarrow س = \pm (9)^{\frac{3}{2}} \Leftarrow س = \pm 27$

$س^{\frac{2}{3}} = 1 \Leftarrow س = \pm (1)^{\frac{3}{2}} \Leftarrow س = \pm 1$

∴ م.ح = {± 27 ، ± 1}

(4) $\sqrt[3]{س^5} - \sqrt[6]{س^5} = 6$

الحل

$س^{\frac{5}{3}} - س^{\frac{5}{6}} - 6 = 0$

$(س^{\frac{5}{6}} - 3)(س^{\frac{5}{6}} + 2) = 0$

$س^{\frac{5}{6}} = 3 \Leftarrow س = 3^{\frac{6}{5}} \Leftarrow س = \sqrt[5]{729}$

$س^{\frac{5}{6}} = -2$ مرفوض

∴ م.ح = {$\sqrt[5]{729}$}

تدريب 5: إختر الإجابة الصحيحة

(1) إذا كان: $س^{\frac{3}{2}} = 64$ فإن س = ...

(أ) 512　(ب) 16　(ج) 4　(د) 2

(2) مجموعة حل المعادلة $(س-3)^{\frac{5}{3}} = 32$ في ح هي ....

(أ) {3}　(ب) {-11 ، 11}　(ج) {11}　(د) {2}

(3) مجموعة حل المعادلة: $\sqrt{س^3} = 8$ في ح هي ....

(أ) {2}　(ب) {4}　(ج) {16}　(د) {64}

(4) مجموعة حل المعادلة: $س^{\frac{2}{3}} = 25$ في ح هي ....

(أ) {5}　(ب) {125}　(ج) {5 ، -5}　(د) {125 ، -125}

(5) مجموعة حل المعادلة $\sqrt[3]{(س-1)^5} = 32$ في ح

(أ) {3}　(ب) {-3}　(ج) {-9}　(د) {9}

(6) مجموعة حل المعادلة:
$س + 15 = 8\sqrt{س}$ في ح هي ....

(أ) {9 ، 25}　(ب) {-9 ، 25}　(ج) {9 ، -25}　(د) {-9 ، -25}

(7) مجموعة حل المعادلة
$س - 3 س^{\frac{1}{2}} + 2 = 0$ في ح هي ....

(أ) {-1 ، -4}　(ب) {-1 ، 4}　(ج) {1 ، -4}　(د) {1 ، 4}

③ إذا كان $أ^م = أ^ن$ فإن: $م = ن$ حيث $أ ، م ، ن \in ح$ ، $أ \in ح - \{ -١ ، ٠ ، ١ \}$

إذا كان $أ^ن = ب^ن$ وكان:

① ن عدداً فردياً فإن: $أ = ب$

② ن عدداً زوجياً فإن: $أ = \pm ب$

③ $أ \neq \pm ب$ فإن: ن = صفر

تدريب ١ أوجد مجموعة الحل في ح

① $٥^{٢س - ١} = \frac{١}{١٢٥}$

$٥^{٢س - ١} = ٥^{-٣}$

$٢س - ١ = -٣$

$٢س = -٢ \Leftarrow س = -١$

$\therefore م.ح = \{-١\}$

② $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢س - ١} = \frac{٢٧}{١٢٥}$

$\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢س - ١} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٣}$

$٢س - ١ = ٣$

$٢س = ٤ \Leftarrow س = ٢ \Leftarrow م.ح = \{٢\}$

③ $\left(\sqrt{٣}\right)^{س^٢ - ٥س} = ١$

$\left(\sqrt{٣}\right)^{س^٢ - ٥س} = \left(\sqrt{٣}\right)^{٠}$

$س^٢ - ٥س = ٠$

$س(س - ٥) = ٠$

$م.ح = \{٠ ، ٥\}$

④ $٣^{س^٢ - ٤٢} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

$٣^{س^٢ - ٤٢} = ٣^{-س}$

$س^٢ - ٤٢ = -س$

$س^٢ + س - ٤٢ = ٠$

$(س + ٧)(س - ٦) = ٠$

$م.ح = \{-٧ ، ٦\}$

⑤ $٢ \times ٤^{س + ٣} = \frac{١}{٣٢}$

$٤^{س + ٣} = \frac{١}{٣٢} \div ٢$

$٤^{س + ٣} = \frac{١}{٦٤}$

$٤^{س + ٣} = ٤^{-٣}$

$س + ٣ = -٣$

$\therefore س = -٦$

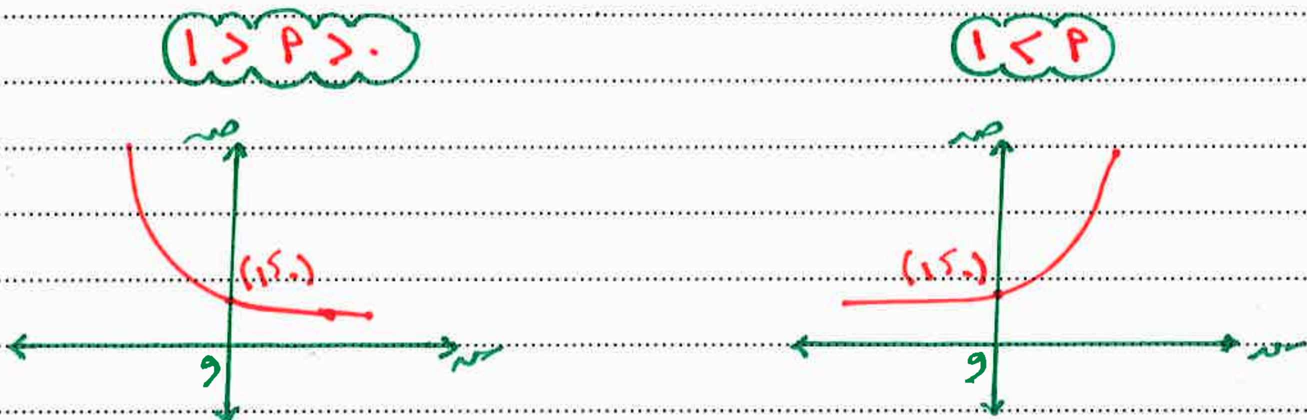
$م.ح = \{-٦\}$

الدالة الأسية

تعريف: إذا كان: $ا \in ع^+ - \{1\}$

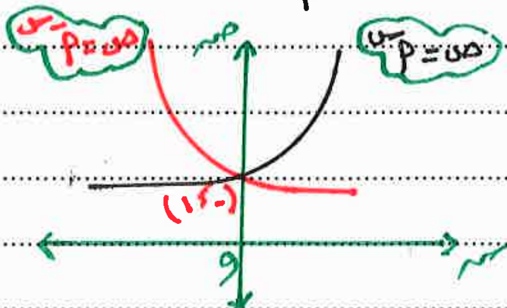
فإن: الدالة د: $ع \longrightarrow ع^+$ حيث $د(س) = ا^س$ تسمى دالة أسية

التمثيل البياني للدالة الأسية



خواص الدالة الأسية د: $د(س) = ا^س$

1. المجال: ع
2. المدى: $ع^+$ ويقع منحناها فوق محور السينات
3. الدالة تزايدية على مجالها إذا كان $ا > ١$ وتسمى دالة نمو أسي معامله ا
4. الدالة تناقصية على مجالها إذا كان $٠ < ا < ١$ وتسمى دالة تضاؤل أسي معامله ا
5. منحنى الدالة الأسية يمر بالنقطة (٠، ١)
6. الدالة $د(س) = ا^س$ هي دالة أحادية
7. منحنى الدالة: $د(س) = ا^س$ صورته منحنى الدالة $د(س) = (\frac{1}{ا})^س$ بالانعكاس على محور الصادات

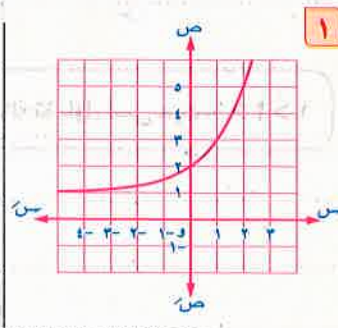


تدريب ١

ارسم منحنى الدوال التالية:

① $د(س) = ٢^س + ١$ ② $د(س) = ٣^{س-١}$ ③ $د(س) = -(\frac{١}{٢})^س$

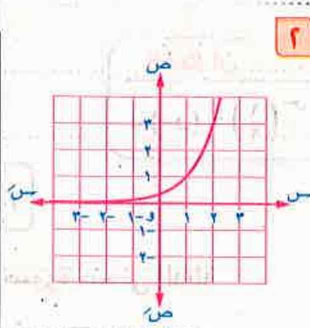
الحل



المجال: ح

المدى:]١ ، ∞[

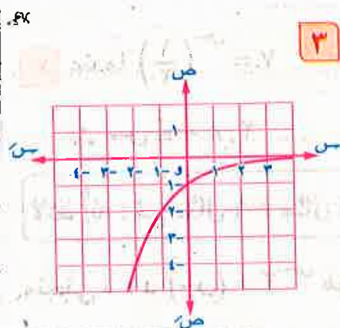
الاطراد: تزايدية على مجالها



المجال: ح

المدى:]٠ ، ∞[

الاطراد: تزايدية على مجالها



المجال: ح

المدى:]-∞ ، ٠[

الاطراد: تزايدية على مجالها

تدريب ٢

إذا كانت $د(س) = ٣^س$ أوجد قيمة س التي تحقق: $د(س+١) + د(س-١) = ٩٠$

الحل

$٣^{س+١} + ٣^{س-١} = ٩٠$

$٣^س × ٣ + ٣^س × \frac{١}{٣} = ٩٠$

$٣^س (٣ + \frac{١}{٣}) = ٩٠$

$٣^س × \frac{١٠}{٣} = ٩٠$

$∴ ٣^س = ٢٧$

$٣^س = ٣^٣$

$∴ س = ٣$

تدريب ٣

إذا كانت $د(س) = ٥^س$ أوجد قيمة س التي تحقق: $د(٢س) + ٢٥ = ٢٦ د(س)$

الحل

$٥^{٢س} + ٢٥ = ٢٦ × ٥^س$

$٥^{٢س} - ٢٦ × ٥^س + ٢٥ = ٠$

$(٥^س - ٢٥)(٥^س - ١) = ٠$

$٥^س = ٥^٢ ⇐ س = ٢$

$٥^س = ٥^٠ ⇐ س = ٠$

تدريب ٤ إختر الإجابة الصحيحة

١) إذا كانت د(س) = $٢^{س}$ فإن: د(−س) =

(أ) $-٢^{س}$ (ب) $(\frac{١}{٢})^{س}$ (ج) $٢^{س+١}$ (د) $(\frac{١}{٢})^{-س}$

٢) إذا كانت د(س) = $٣^{س}$ فإن: د(أ) × د(ب) =

(أ) د(أ+ب) (ب) أب (ج) د(أب) (د) أ+ب

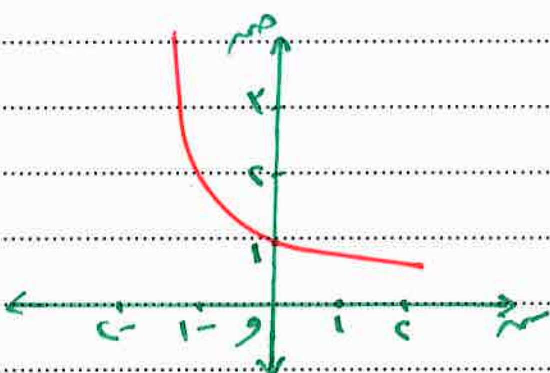
٣) إذا كان: د(س+١) = $٢^{س}$ وكان: د(أ) = ٨ فإن أ =

(أ) ٣ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٥

٤) منحنى الدالة د(س) = $٣^{-س}$ + ٤ يقطع محور الصادات في النقطة

(أ) (٠، ٥) (ب) (٠، ٥) (ج) (٠، ٦) (د) (٠، ٦)

٥) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث



(أ) د(س) = $٢^{س+١}$

(ب) د(س) = $٢^{-س}$

(ج) د(س) = $٢^{س}$

(د) د(س) = $٢^{س-١}$

٦) الدالة الأسية د حيث د(س) = $أ^{س}$ ، أ > ١ يقترب خطها البياني من

(أ) محور السينات (الإتجاه الموجب)

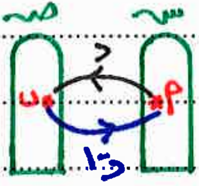
(ب) محور السينات (الإتجاه السالب)

(ج) محور الصادات (الإتجاه الموجب)

(د) محور الصادات (الإتجاه السالب)

الدالة العكسية

إذا كانت د دالة أحادية مجالها س ومداها ص فإنه كل عنصر ص في المدى يناظره عنصر وحيد س في المجال ولذلك يمكن تعيين دالة عكسية من ص إلى س ويرمزلها بالرمز $د^{-1}$



* لكل (أ ، ب) ∈ بيان د
فإن (ب ، أ) ∈ بيان $د^{-1}$

خواص الدالة العكسية

① الدالة د والدالة العكسية $د^{-1}$ متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س

② مجال الدالة د = مدى الدالة العكسية $د^{-1}$

③ مدى الدالة د = مجال الدالة العكسية $د^{-1}$

④ يقال إن د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا كان
(د ∘ ر)(س) = س ، (ر ∘ د)(س) = س

تدريب ١ إذا كانت د دالة بيانها هو : د = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨)}
أوجد بيان الدالة العكسية للدالة د

الحل

بيان $د^{-1}$ = {(٢ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٣) ، (٨ ، ٤)}

تدريب ٢ أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث د(س) = ٣س − ٢

الحل

ص = ٣س − ٢ بتبديل ص بدلاً من س

س = ٣ص − ٢

٣ص = س + ٢ ⇐ ∴ ص = $\frac{1}{3}$(س + ٢) ⇐ ∴ $د^{-1}$(س) = $\frac{1}{3}$(س + ٢)

تدريب ٣ إذا كانت د حيث $د(س) = \frac{1}{س - ٢} + ٣$ أوجد :

(١) مجال ومدى د (٢) $د^{-1}(س)$ وبين مجال ومدى $د^{-1}$

الحل

(١) مجال د = ح − {٢} مدى د = ح − {٣}

(٢) ∵ $ص = \frac{1}{س - ٢} + ٣$ ⟸ ∴ $س = \frac{1}{ص - ٢} + ٣$

∴ $\frac{1}{ص - ٢} = س - ٣$ ⟸ $د^{-1}(س) = \frac{1}{س - ٣} + ٢$

مجال $د^{-1}(س)$ = ح − {٣} مدى $د^{-1}(س)$ = ح − {٢}

تدريب ٤ إذا كانت د دالة حيث $د(س) = ٢ + \sqrt{س - ٣}$ أوجد :

(١) مجال ومدى د (٢) $د^{-1}(س)$ وبين مجالها ومداها

الحل

(١) ∵ س − ٣ ≤ ٠ ⟸ س ≤ ٣

∴ مجال د = [٣ ، ∞[

لإيجاد المدى: $\sqrt{س - ٣}$ ≤ ٠ بإضافة ٢

∴ $٢ + \sqrt{س - ٣}$ ≤ ٢

∴ د(س) ≤ ٢

∴ المدى: [٢ ، ∞[

(٢) $ص = ٢ + \sqrt{س - ٣}$ بالتبديل

$س = ٢ + \sqrt{ص - ٣}$

$س - ٢ = \sqrt{ص - ٣}$ بالتربيع

$(س - ٢)^2 = ص - ٣$

∴ $ص = (س - ٢)^2 + ٣$

∴ $د^{-1}(س) = (س - ٢)^2 + ٣$

مجال $د^{-1}(س)$ = مدى د = [٢ ، ∞[

مدى $د^{-1}(س)$ = مجال د = [٣ ، ∞[

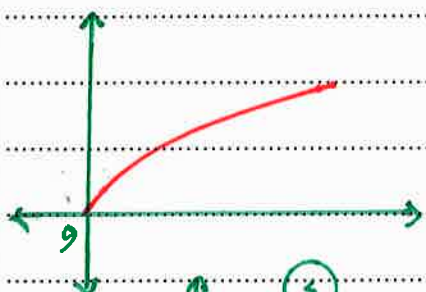
تدريب ٥

إختر الإجابة الصحيحة :-

١) إذا كانت د دالة حيث د(س) = ٧ س فإن : دَ(س) =

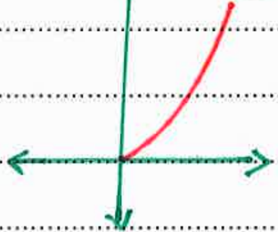
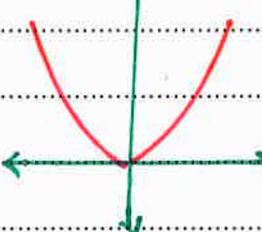
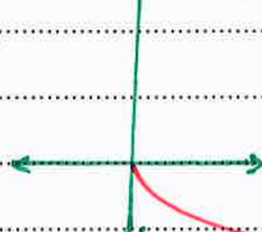
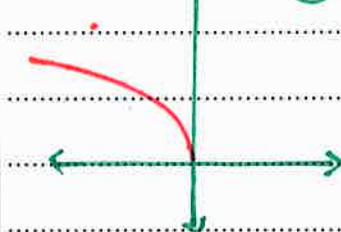
(أ) ٧ س (ب) $\frac{س}{٧}$ (ج) $\frac{٧}{س}$ (د) لا توجد

٢) إذا كان التمثيل البياني للدالة د هو

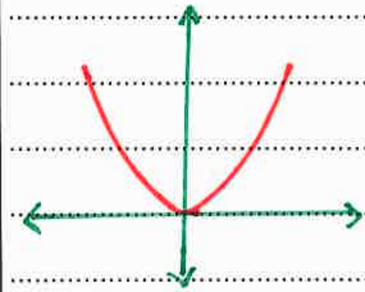


حيث د(س) = $\sqrt{س}$ ، س ≥ ٠

فإن الشكل البياني للدالة دَ هو الشكل ....

(أ)  (ب)  (ج)  (د) 

٣) الشكل المقابل يبين التمثيل البياني للدالة د



حيث د(س) = س² ، س ∈ ح

فإن : دَ(س) =

(أ) = $\sqrt{س}$ (ب) = $-\sqrt{س}$

(ج) = $\pm\sqrt{س}$ (د) غير موجودة

٤) إذا كانت : ٣^{د(س)} = ٢ س - ١ فإن : دَ(٠) =

(أ) ١ (ب) -١ (ج) ٢ (د) ٥



الدالة اللوغاريتمية

$ص = لو_أ س \Leftrightarrow س = أ^{ص}$ حيث $أ \in ح^+ - \{1\}$ ، $س \in ح^+$ ، $ص \in ح$

تدريب 1

عبر عما يأتي بصورة لوغاريتمية	عبر عما يأتي بصورة أسية
(1) $2^6 = 64 \leftarrow لو_2 64 = 6$	(1) $لو_7 49 = 2$ ، $49 = 7^2$
(2) $5^{-3} = \frac{1}{125} \leftarrow لو_5 \frac{1}{125} = -3$	(2) $لو_3 \frac{1}{27} = -3$ ، $\frac{1}{27} = 3^{-3}$
(3) $7^{صفر} = 1 \leftarrow لو_7 1 = صفر$	(3) $لو_ب أ = جـ$ ، $أ = ب^{جـ}$

لو (الأساس) (العدد) = (الأس)

- العدد $\in ح^+$
- الأساس $\in ح^+ - \{1\}$
- الأس $\in ح$

الدالة اللوغاريتمية

إذا كان: $أ \in ح^+ - \{1\}$ فإن: الدالة $د : ح^+ \longrightarrow ح$ حيث $د(س) = لو_أ س$ تسمى دالة لوغاريتمية

خواص الدالة اللوغاريتمية $د : د(س) = لو_أ س$

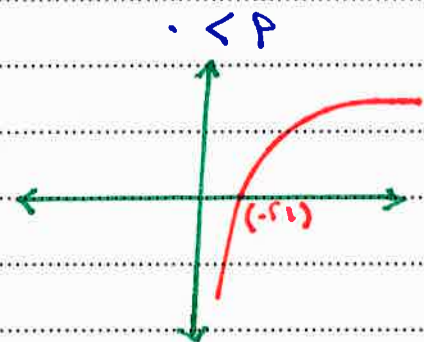
1. مجال الدالة اللوغاريتمية $= ح^+$
2. مدى الدالة اللوغاريتمية $= ح$
3. إذا كانت $أ > 1$ تكون تزايدية وإذا كانت $0 < أ < 1$ تكون تناقصية
4. جميع منحنيات الدوال اللوغاريتمية لأي أساس موجب $\neq 1$ تمر بالنقطة $(1 ، 0)$
5. الدوال اللوغاريتمية هي دالة أحادية أي إذا كان: $لو_أ س = لو_أ ص$ فإن $س = ص$

⑥ الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية

$0 < a < 1$



$a > 0$



* لإيجاد مجال الدالة اللوغاريتمية

① نضع العدد > ٠ ② نضع الأساس > ٠ ③ نضع الأساس ≠ ١

تدريب ٢ عين مجال الدوال التالية :-

① د(س) = لو٤ (س-٣) ② د(س) = لو٤ (٤-س)

③ د(س) = لو(س-١) ٧ ④ د(س) = لو(س-٢) س

الحل

① بوضع س-٣ > ٠
س > ٣
∴ المجال =]٣، ∞[

② بوضع ٤-س > ٠
٤ > س
∴ المجال]-∞، ٤[

③ س-١ > ٠ ⇐ س > ١
س-١ ≠ ١ ⇐ س ≠ ٢
∴ المجال :]١، ∞[- {٢}

④ س > ٠ ⇐]٠، ∞[
س-٢ > ٠ ⇐]٢، ∞[
س-٢ ≠ ١ ⇐ س ≠ ٣
∴ المجال =]٢، ∞[- {٣}

الرياضيات : فهم .. إبتكار .. تطبيق

خواص اللوغاريتمات

إذا كانت $أ \in ح^+ - \{1\}$ ، $س ، ص \in ح^+$

① $لو_{أ} س ص = لو_{أ} س + لو_{أ} ص$

② $لو_{أ} \frac{س}{ص} = لو_{أ} س - لو_{أ} ص$

③ $لو_{أ} س^{ن} = ن \, لو_{أ} س$

④ $لو_{أ} أ = 1$

⑤ $لو_{ص} س = \frac{لو_{أ} س}{لو_{أ} ص}$

⑥ $لو_{ص} س = \frac{1}{لو_{س} ص}$

⑦ إذا كان $ص = أ^{لو_{أ} س}$ فإن $ص = س$

⑧ $لو_{أ} 1 = صفر$

ملحوظة: اللوغاريتم المعتاد هو لوغاريتم أساسه ١٠ ولا يكتب (Log) الآله

تدريب ٣: بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة :-

① $لو_{٢} ١٥ + لو_{٢} ١٤ - لو_{٢} ١٠٥$

المقدار $= لو_{٢} \frac{١٥ \times ١٤}{١٠٥} = لو_{٢} ٢ = ١$

② $لو ٠.٠٠٩ - لو \frac{٢٧}{١٦} + لو \frac{١٢٥}{٨} - لو \frac{١}{١٢}$

المقدار $= لو ٠.٠٠٩ - لو \frac{٢٧}{١٦} + لو \frac{١٢٥}{٨} - لو \frac{١}{١٢}$

$= لو \frac{١٢ \times ١٢٥ \times ١٦ \times ٠.٠٠٩}{١ \times ٨ \times ٢٧}$

$= لو ١$

$= صفر$

③ $\frac{١}{لو_{٢} ١٢} + \frac{١}{لو_{٨} ١٢} + \frac{١}{لو_{٩} ١٢}$

المقدار $= لو_{١٢} ٢ + لو_{١٢} ٨ + لو_{١٢} ٩$

$= لو_{١٢} ٢ \times ٨ \times ٩ = لو_{١٢} ١٤٤ = ٢$

④ $لو_{أبجـ} أ + لو_{أبجـ} ب + لو_{أبجـ} جـ$

المقدار $= لو_{أبجـ} أبجـ$

$= ١$

منفعة الرياضيات في فهمها ....

حل المعادلة اللوغاريتمية

تدريب ٤: أوجد مجموعة الحل في ح

① $لو_{٢} س = ٧$

$س = ٢^{٧} = ١٢٨$

$\therefore م.ح = \{١٢٨\}$

② $لو_{٣} (٢س - ٥) = ٠$

$٢س - ٥ = ٣^{٠}$

$٢س = ٦ \Leftarrow س = ٣$

$م.ح = \{٣\}$

③ $لو_{س} (٢س + ٨) = ٢$

$س^{٢} = ٢س + ٨$

$س^{٢} - ٢س - ٨ = ٠$

$س = ٤$ أو $س = -٢$ مرفوض

$\therefore م.ح = \{٤\}$

④ $لو_{٢} (لو_{٣} س) = ١$

$لو_{٣} س = ٢^{١} = ٢$

$س = ٣^{٢} = ٩$

$م.ح = \{٩\}$

⑤ $لو_{س-١} ٢٧ = ٣$

$(س - ١)^{٣} = ٢٧$

$س - ١ = ٣ \Leftarrow س = ٤$

$\therefore م.ح = \{٤\}$

⑥ $لو_{٢} س + لو_{٢} (س + ٢) = ٣$

$لو_{٢} س(س + ٢) = ٣$

$س^{٢} + ٢س = ٢^{٣}$

$س^{٢} + ٢س - ٨ = ٠$

$س = ٢$ أو $س = -٤$ مرفوض

$م.ح = \{٢\}$

⑦ $لو_{٣} (س - ١) + لو_{٣} (س + ١) = لو_{٣} ٨$

$لو_{٣} (س - ١)(س + ١) = لو_{٣} ٨$

$س^{٢} - ١ = ٨$

$س^{٢} = ٩ \Leftarrow س = ٣$ أو $س = -٣$ مرفوض

$م.ح = \{٣\}$

⑧ $(لو س)^{٢} - لو س^{٢} = ٣$

$(لو س)^{٢} - ٢ لو س - ٣ = ٠$ مقدار ثلاثي

(لو س − ٣)(لو س + ١) = ٠

لو س = ٣ ، لو س = −١

س = $١٠^{٣}$ ، س = $١٠^{-١}$

م.ح = {١٠٠٠ ، $\frac{١}{١٠}$}

(٩) $لو_{٣}$ س + $لو_{س}$ ٣ = ٢

∵ $لو_{٣}$ س + $\frac{١}{لو_{٣} س}$ = ٢ × $لو_{٣}$ س

$(لو_{٣} س)^{٢}$ + ١ = ٢ $لو_{٣}$ س

$(لو_{٣} س)^{٢}$ − ٢ $لو_{٣}$ س + ١ = ٠

$(لو_{٣} س − ١)^{٢}$ = ٠

$لو_{٣}$ س = ١ ⟸ س = $٣^{١}$ = ٣

(١٠) $لو_{٤}$ س = ١ − $لو_{٤}$ (س − ٣)

$لو_{٤}$ س + $لو_{٤}$ (س − ٣) = ١

$لو_{٤}$ س (س − ٣) = ١

$س^{٢}$ − ٣س = ٤

$س^{٢}$ − ٣س − ٤ = ٠

س = ٤ ، س = −١ مرفوض

م.ح = {٤}

تدريب ٥: إذا كان $٢^{س+١}$ = ٥ أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين

بأخذ لو للطرفين

لو $٢^{س+١}$ = لو ٥

(س + ١) لو ٢ = لو ٥

س لو ٢ + لو ٢ = لو ٥

س لو ٢ = لو ٥ − لو ٢

س = $\frac{لو ٥ − لو ٢}{لو ٢}$ ≃ ١,٣٢

تدريب ٦: إذا كان $٧^{س+١}$ = $٣^{س−٢}$ أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين

لو $٧^{س+١}$ = لو $٣^{س−٢}$

(س + ١) لو ٧ = (س − ٢) لو ٣

س لو ٧ + لو ٧ = س لو ٣ − ٢ لو ٣

س لو ٧ − س لو ٣ = −٢ لو ٣ − لو ٧

س (لو ٧ − لو ٣) = −٢ لو ٣ − لو ٧

∴ س = $\frac{−٢ لو ٣ − لو ٧}{لو ٧ − لو ٣}$ ≃ −٤,٨٩

تدريب ٧ إذا كان س ص = ١٦ إثبت أن:
$٣ لو_{٢} س + ٤ لو_{٢} ص - لو_{٢} س ص = ٨$

ط.أ = $لو_{٢} س^{٣} + لو_{٢} ص^{٤} - لو_{٢} س ص$

$= لو_{٢} \frac{س^{٣} ص^{٤}}{س ص}$

$= لو_{٢} س^{٢} ص^{٢} = لو_{٢} (س ص)^{٢}$

$= لو_{٢} (١٦)^{٢} = لو_{٢} ٢^{٨} = ٨$

تدريب ٨ حل المعادلة: $لو_{٩} لو_{٣} لو_{س} ٢٧ = صفر$

$\because لو_{٩} [لو_{٣} لو_{س} ٢٧] = ٠$

$لو_{٣} لو_{س} ٢٧ = ٩^{٠} = ١$

$\therefore لو_{٣} [لو_{س} ٢٧] = ١$

$لو_{س} ٢٧ = ٣$

$س^{٣} = ٢٧ \Leftarrow س = ٣$

تدريب ٩ إختر الإجابة الصحيحة

١) إذا كانت $لو_{٥} س = ٣$ فإن قيمة $لو_{٥} (\frac{س}{٥}) = \dots$
- أ) ٢
- ب) ١٢٥
- ج) ٣
- د) ٢٥

٢) إذا كان: $لو_{س} ٢٥ = ٢$ فإن $س^{٣} + س^{٢} - س = \dots$
- أ) ١٠٥
- ب) ١٤٥
- ج) ٩٥
- د) ١٥٥

٣) قيمة $٣^{لو_{٣} ٥} = \dots$
- أ) ١٥
- ب) ٥
- ج) ١
- د) ٣

٤) مجموعة حل المعادلة $لو_{س} ٨١ = ٤$ هي ..... حيث $س \in ح^{+} - \{١\}$
- أ) $\{٣ ، -٣\}$
- ب) $\{٩ ، -٩\}$
- ج) $\{٣\}$
- د) $\{\frac{٨١}{٤}\}$

٥) إذا كانت $لو_{س} ٣ = ص - ١$ فإن .....
- أ) $٢ س^{ص}$
- ب) $ص = \frac{١}{٣} س^{ص}$
- ج) $س = ٣ ص^{س}$
- د) $س = \frac{١}{٣} ص^{س}$

٦) الدالة العكسية للدالة $د(س) = لو_{٢} (س)$ هي $د^{-١}(س) = \dots$
- أ) $س^{٢}$
- ب) $٢^{س}$
- ج) $(\frac{١}{٢})^{س}$
- د) $٢^{س} + ٣$

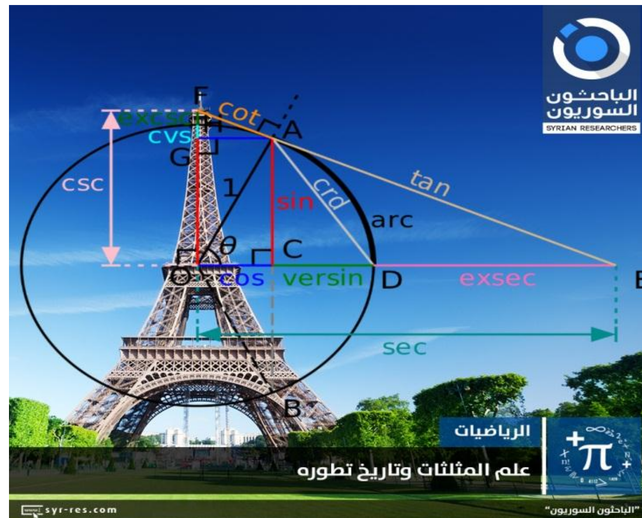
اللهم إن كان توفيقاً فمن الله
وإن كان خطأ أو نسيان فمني ومن الشيطان

ثانياً :

حساب المثلثات

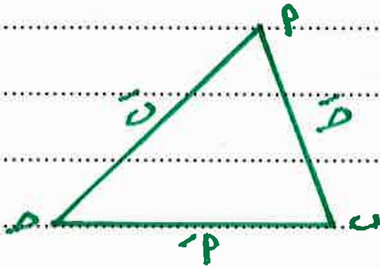
(١) قانون الجيب

(٢) قانون جيب التمام



قانون الجيب

في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها



في △ أ ب جـ يكون:

$$\frac{أ}{\text{جا } أ} = \frac{ب}{\text{جا } ب} = \frac{جـ}{\text{جا } جـ}$$

تمرين مشهور

$$\frac{أ}{\text{جا } أ} = \frac{ب}{\text{جا } ب} = \frac{جـ}{\text{جا } جـ} = ٢ نق$$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

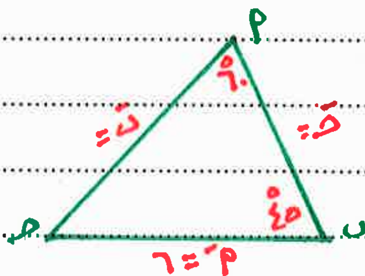
ملاحظات

1. محيط △ أ ب جـ = أ + ب + جـ
2. مساحة △ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ ب جا جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ جا أ = $\frac{1}{2}$ أ جـ جا ب
3. محيط الدائرة = ٢ ط نق ، مساحة الدائرة = ط نق²
4. طول الضلع الأكبر يقابل قياس الزاوية الأكبر والعكس

تدريب ١

أ ب جـ △ فيه ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠ب) = ٤٥° ، أ = ٦ سم أوجد محيط △ أ ب جـ لأقرب سم.

الحل



ق(∠جـ) = ١٨٠° − ١٠٥° = ٧٥°

$$\frac{٦}{\text{جا } ٦٠°} = \frac{ب}{\text{جا } ٤٥°} = \frac{جـ}{\text{جا } ٧٥°}$$

$$ب = \frac{٦ \times \text{جا } ٤٥°}{\text{جا } ٦٠°} \simeq ٤{,}٩ \text{ سم}$$ ، $$جـ = \frac{٦ \times \text{جا } ٧٥°}{\text{جا } ٦٠°} \simeq ٦{,}٧ \text{ سم}$$

∴ محيط △ أ ب جـ = ٦ + ٤,٩ + ٦,٧ = ١٧,٦ ≃ ١٨ سم

تدريب ٢

△ أ ب جـ فيه جـ = ٦,٧ سم ، ق(∠أ) = ٨٠° ، ق(∠ب) = ٤٧° أوجد طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

$ق(\hat{ح}) = 180° - 127° = 53°$

$\because \frac{ح}{جا ح} = 2 نق \Leftarrow \frac{7.6}{جا 53°} = 2 نق \Leftarrow نق \simeq 4.76$ سم

تدريب ٣

$\triangle$ ل م ن فيه: ق($\hat{ل}$) = 60° ، ق($\hat{م}$) = 45° وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه 20 سم أوجد مساحة $\triangle$ ل م ن

الحل

$ق(\hat{ن}) = 180° - 105° = 75°$

$\frac{ل}{جا 60°} = \frac{م}{جا 45°} = \frac{ن}{جا 75°} = 2 \times 20$

$\therefore ل = 40 جا 60° \simeq 34.6$ سم

$م = 40 جا 45° \simeq 28.3$ سم

$\because$ مساحة $\triangle = \frac{1}{2}$ ل م جا ن

$= \frac{1}{2} \times 34.6 \times 28.3$ جا 75°

$= 472.9$ سم²

تدريب ٤

إذا كان محيط $\triangle$ أ ب ج يساوي 24 سم ، ق($\hat{ب}$) = 30° ، ق($\hat{ج}$) = 48° أوجد ب

الحل

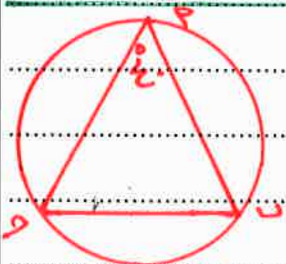
$\because \frac{أ}{جا 102°} = \frac{ب}{جا 30°} = \frac{ج}{جا 48}$

$\therefore \frac{أ + ب + ج}{جا 102° + جا 30° + جا 48°} = \frac{ب}{جا 30°}$

$\therefore \frac{24}{2.22} = \frac{ب}{جا 30°}$

$\therefore ب \simeq 5.4$ سم

تدريب ٥



في الشكل المقابل .. دائرة طول نصف قطرها 5 سم تمر برؤوس $\triangle$ أ ب ج ، ق($\hat{أ}$) = 40° فإن طول ب ج = ...

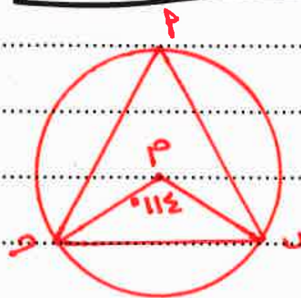
(أ) 10 جا 40° (ب) 5 جا 40°

(ج) $\frac{10}{جا 40°}$ (د) $\frac{5}{جا 40°}$

الحل

$\frac{ب ج}{جا 40°} = 2 نق$

ب ج = 10 جا 40°



تدريب ٦ في الشكل المقابل: أ ب جـ مرسوم في الدائرة م التي طول نصف قطرها ١٢ سم ، ق(∠ب م جـ) = ١١٤° فيكون : أ = ... سم لأقرب عدد صحيح.

(أ) ٢٢ (ب) ٢٠
(جـ) ١٩ (د) ١٠

الحل

∵ ق(∠أ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب م جـ) المركزية المشتركة معها في نفس القوس

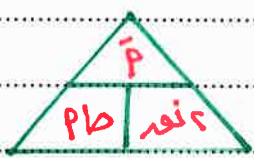
∴ ق(∠أ) = ٥٧°

∵ $\frac{أ}{جا ٥٧°}$ = ٢ نق

∴ أ = ٢٤ جا ٥٧° ≃ ٢٠ سم

تدريب ٧ في △ أ ب جـ أثبت أن مساحته = $\frac{أ ب جـ}{٤ نق}$ حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث.

الحل



∵ مساحة △ = $\frac{1}{2}$ ب جـ جا أ

= $\frac{1}{2}$ ب جـ × $\frac{أ}{٢ نق}$ = $\frac{أ ب جـ}{٤ نق}$

تدريب ٨ في △ أ ب جـ أثبت أن: مساحته = ٢ نق² جا أ جا ب جا جـ

الحل

∵ مساحة △ = $\frac{1}{2}$ ب جـ جا أ

= $\frac{1}{2}$ × ٢ نق جا ب × ٢ نق جا جـ × جا أ

= ٢ نق² جا أ جا ب جا جـ

بالتعويض عن ب = ٢ نق جا ب
جـ = ٢ نق جا جـ

تذكر أن

△ أ ب جـ فيه ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

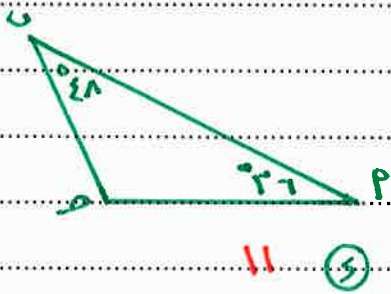
∴ أ + ب = ١٨٠ − جـ

بأخذ جا للطرفين: جا(أ + ب) = جا جـ

بأخذ جتا الطرفين: جتا(أ + ب) = − جتا جـ

ظا الطرفين: ظا(أ + ب) = − ظا جـ

تدريب ٩ — اختر الإجابة الصحيحة :-



(١) في الشكل المقابل...

المثلث أ ب جـ فيه: ق(∠أ) = ٣٦° ، ق(∠ب) = ٤٨° ، أ جـ = ٨ سم فيكون ب = ... سم لأقرب سم

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د) ١١

(٢) في Δ أ ب جـ أى من العبارات التالية صحيحة ؟

(أ) أ جا ب = ب جا أ (ب) أ = ب جا جـ

(جـ) جا أ + جا ب = أ + ب (د) $\frac{أ}{جا أ} = \frac{جا ب}{ب}$

(٣) إذا كان : نق = طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ فإن: نق جا أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ أ (ب) ٢ أ (جـ) أ (د) ٤ أ

(٤) إذا كان نق نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ وكان أ = $\frac{١}{٢}$ نق فإن ق(∠أ) = ...

(أ) $جا^{-١}(١)$ (ب) $جا^{-١}(٢)$ (جـ) $جا^{-١}(\frac{١}{٤})$ (د) $جا^{-١}(\frac{١}{٢})$

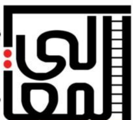
(٥) في Δ أ ب جـ إذا كان أ جا أ = ب جا ب فإن: ....

(أ) ∠أ منفرجة (ب) أ = ب (جـ) ق(∠أ) = ٩٠° (د) ب = جـ

(٦) إذا كان: أ ب جـ مثلث فيه: جتا (ب + جـ) = $\frac{٣}{٥}$ ، ب جـ = ٨ سم فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

الرياضيات : غذاء العقل



قانون جيب التمام

في أي مثلث أ ب جـ يكون :-

$أ^2 = ب^2 + جـ^2 - ٢\ ب\ جـ\ جتا\ أ$

$ب^2 = أ^2 + جـ^2 - ٢\ أ\ جـ\ جتا\ ب$

$جـ^2 = أ^2 + ب^2 - ٢\ أ\ ب\ جتا\ جـ$

$جتا\ أ = \frac{ب^2 + جـ^2 - أ^2}{٢\ ب\ جـ}$

$جتا\ ب = \frac{أ^2 + جـ^2 - ب^2}{٢\ أ\ جـ}$

$جتا\ جـ = \frac{أ^2 + ب^2 - جـ^2}{٢\ أ\ ب}$

تدريب ١: أ ب جـ مثلث فيه: أ = ٥ سم ، ب = ٣ سم ، ق(جـ) = ١٢٠° أوجد جـ

الحل

∵ $جـ^2 = أ^2 + ب^2 - ٢\ أ\ ب\ جتا\ جـ$

∴ $جـ^2 = ٢٥ + ٩ - ٢ \times ٥ \times ٣\ جتا\ ١٢٠°$ ⟸ جـ = ٧ سم

تدريب ٢: أوجد قياس أكبر زاوية في Δ أ ب جـ حيث: أ = ١٢ سم ، ب = ١١ سم ، جـ = ٥ سم

الحل

أكبر زاوية هي المقابلة لأكبر ضلع

∴ $جتا\ أ = \frac{ب^2 + جـ^2 - أ^2}{٢\ ب\ جـ}$ ⟸ $جتا\ أ = \frac{١٢١ + ٢٥ - ١٤٤}{٢ \times ١١ \times ٥}$ ⟸ ق(أ) = ٢٩ً ٥٧َ ٨٨°

تدريب ٣: أ ب جـ Δ فيه: ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا جـ أوجد ق(جـ)

الحل

∵ ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا جـ ÷ ١٢

∴ $\frac{جا\ أ}{٣} = \frac{جا\ ب}{٤} = \frac{جا\ جـ}{٢}$

∴ أ : ب : جـ = ٣ : ٤ : ٢

نفرض: أ = ٣ ل ، ب = ٤ ل ، جـ = ٢ ل

$جتا\ جـ = \frac{٩ل^2 + ١٦ل^2 - ٤ل^2}{٢ \times ٣ل \times ٤ل} = \frac{٢١ل^2}{٢٤ل^2}$

∴ ق(جـ) = ٥٧َ ٢٨°

تدريب ٤: أ ب حـ Δ مساحته = ٥ $\sqrt{3}$ سم² وفيه: أ = ٤ سم ، ق(ب̂) = ٦٠° أوجد ب

الحل

∵ م (Δ أ ب حـ) = $\frac{1}{2}$ أ حـ جا ب

∴ ٥ $\sqrt{3}$ = $\frac{1}{2}$ × ٤ × حـ جا ٦٠

٥ $\sqrt{3}$ = ٢ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ حـ

∴ حـ = ٥ سم

∵ ب² = أ² + حـ² − ٢ أ حـ جتا ب

= ١٦ + ٢٥ − ٢ × ٤ × ٥ جتا ٦٠°

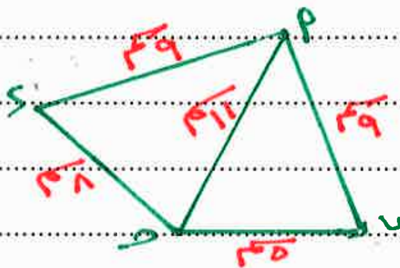
∴ ب = ٤٫٦ سم

تدريب ٥: في الشكل المقابل..

أ ب حـ ء شكل رباعي فيه: أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ٥ سم

ء حـ = ٨ سم ، أ ء = ٩ سم

إثبت أن الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.



الحل

في Δ أ ب حـ: جتا ب = $\frac{(9)^2+(5)^2-(11)^2}{2\times 9\times 5} = -\frac{1}{6}$

في Δ أ ء حـ: جتا ء = $\frac{(9)^2+(8)^2-(11)^2}{2\times 9\times 8} = \frac{1}{6}$

∵ جتا ء = − جتا ب ⟸ ق(ء̂) + ق(ب̂) = ١٨٠°

⟸ ∴ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري

إفتكر معايا: يكون الشكل رباعي دائري إذا كان فيه:

١) زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة متساويتان

٢) زاويتان متقابلتان متكاملتان .

إفتكر معايا: عند حل المثلث فإننا نوجد جميع عناصر المثلث [٣ زوايا + ٣ أضلاع]

تدريب ٦: أ ب حـ Δ فيه: ب = $\frac{1}{2}$ حـ = ٢ سم ، جتا أ = $\frac{5}{8}$ إثبت أن Δ متساوي الساقين

الحل

∵ أ² = ب² + حـ² − ٢ ب حـ جتا أ

= ٤ + ١٦ − ٢ × ٢ × ٤ × $\frac{5}{8}$ = ١٠

∴ أ = $\sqrt{10}$ سم

∵ أ = حـ ∴ Δ متساوي الساقين

تدريب 7

أ ب ج △ فيه: $أ^2 = (ب - ج)^2 + ب\,ج$ إثبت أن: ق$(\hat{أ}) = 60°$

الحل

$أ^2 = ب^2 + ج^2 - 2\,ب\,ج + ب\,ج$ معطى

$\therefore أ^2 = ب^2 + ج^2 - ب\,ج$ ⟵ (1)

$\because$ جتا أ $= \dfrac{ب^2 + ج^2 - أ^2}{2\,ب\,ج}$ ⟵ (2)

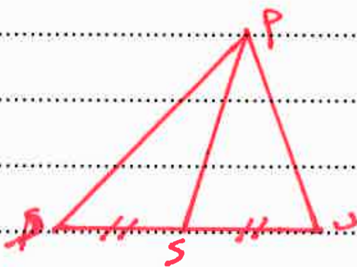
بالتعويض من (1) في (2) ⟸ $\therefore$ جتا أ $= \dfrac{ب^2 + ج^2 - [ب^2 + ج^2 - ب\,ج]}{2\,ب\,ج}$

$\therefore$ جتا أ $= \dfrac{ب^2 + ج^2 - ب^2 - ج^2 + ب\,ج}{2\,ب\,ج} = \dfrac{1}{2}$ ⟸ $\therefore$ ق$(\hat{أ}) = 60°$

تدريب 8

أ ب ج △ فيه: د منتصف ب ج كما بالشكل المقابل

إثبت أن: $(أب)^2 + (أج)^2 = 2(أد)^2 + 2(ب د)^2$



الحل

نفرض: ق$(\angle أ د ب) = \theta$ $\therefore$ ق$(\angle أ د ج) = (180° - \theta)$

في △ أ ب د

$(أب)^2 = (أد)^2 + (ب د)^2 - 2(أد)(ب د)$ جتا θ ⟵ [1]

في △ أ ج د

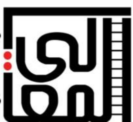
$(أج)^2 = (أد)^2 + (ج د)^2 - 2(أد)(ج د)$ جتا $(180 - \theta)$

$(أج)^2 = (أد)^2 + (ج د)^2 + 2(أد)(ج د)$ جتا θ ⟵ [2]

لاحظ أن جتا $(180 - \theta) = -$ جتا θ

$\because$ ب د = ج د

بجمع [1] + [2] ⟸ $\therefore (أب)^2 + (أج)^2 = 2(أد)^2 + 2(ب د)^2$ #



تدريب ٩

اختر الإجابة الصحيحة :-

① Δ أ ب جـ فيه: أ = ٥٫٥ سم ، ب = ٥٫٢ سم ، ق(جـ) = ٢٠° فإن: جـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٣٫١ (جـ) ٢٫٩ (د) ٣٫٢

② أ ب جـ مثلث فيه: أ ب = ٢٤ سم ، ب جـ = ٢٠ سم ، ق(∠أ ب جـ) = ١١٥°

فإن: مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ = ... سم²

(أ) ٣٤٩ π (ب) ٤٢١ π (جـ) ١٧٠ π (د) ٤٩ π

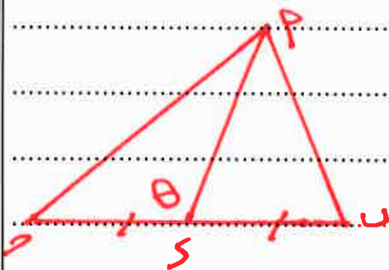
③ في Δ أ ب جـ إذا كان: أ : ب : جـ = ٥ : ٦ : ٧ فإن قياس أكبر زواياه =

(أ) $112^\circ\ 15'\ 45''$ (ب) $78^\circ\ 27'\ 47''$ (جـ) $123^\circ\ 45'\ 35''$ (د) $102^\circ\ 55'\ 37''$

④ إذا كانت أطوال أضلاع المثلث هي: س ، س − ٢ ، س + ٢ وكان قياس أكبر زواياه ١٢٠° فإن: س =

(أ) ٦ سم (ب) ٥ سم (جـ) ٣ سم (د) ٤ سم

⑤ في الشكل المقابل ....



(أ ب)² − (أ جـ)² = ...

(أ) ٢(أ د)² + ٢(د ب)²

(ب) ٢(أ د)² + ٢(ب د)² − ٤(أ د)(ب د) جتا θ

(جـ) ٢ أ د × ب جـ جتا θ

(د) ٢(أ د)²

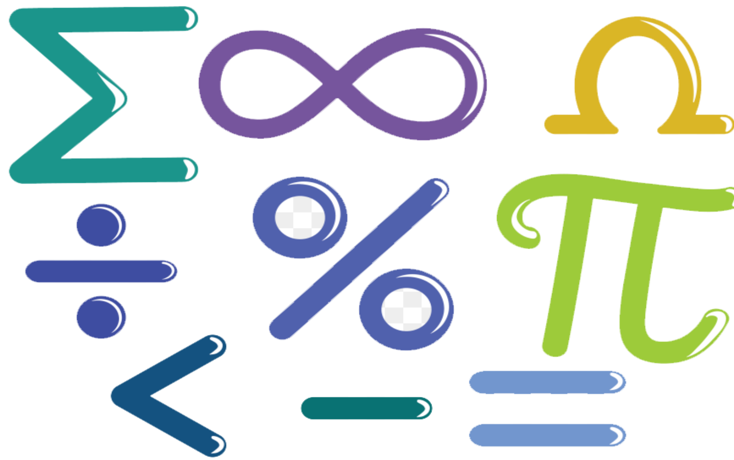
⑥ أ ب جـ Δ فيه: (أ + ب + جـ)(أ + ب − جـ) = ٣ أ ب فإن: ق(جـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

اللهم إن كان توفيقاً فمن الله ... وإن كان خطأً أو نسيان فمني والشيطان

ثالثاً :

التفاضل





مقدمة في النهايات

الرمزان ∞ ، $-\infty$

إذا كان $a \in ح$

∞ يعبر عن كمية أكبر من أي عدد حقيقي موجب يمكن تخيله [ليس عددًا حقيقيًا]

$-\infty$ يعبر عن كمية أصغر من أي عدد حقيقي سالب يمكن تخيله [ليس عددًا حقيقيًا]

(١) $\infty \pm a = \infty$

(٢) $-\infty \pm a = -\infty$

(٣) $\infty \times a = \begin{cases} \infty & \text{عند } a > 0 \\ -\infty & \text{عند } a < 0 \end{cases}$

(٤) $\infty \div a = \begin{cases} \infty & \text{عند } a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases}$

أنواع الكميات

الكمية المعينة: هي كمية لها ناتج محدد

مثل: ٣ ، $\frac{-1}{4}$ ، صفر ، ...

الكمية الغير معينة: هي كمية ليس لها ناتج محدد

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، ...

الكمية الغير معرفة: هي كمية ليس لها معنى

$\frac{a}{\text{صفر}}$ حيث $a \in ح - \{0\}$

تدريب ١

(١) $7 + \infty =$

(٢) $\infty + \infty =$

(٣) $9 \times \infty =$

(٤) $-4 \times -\infty =$

(٥) $5 - \infty =$

(٦) $\infty \times \text{صفر} =$

نهاية دالة عند نقطة

مثال توضيحي

إذا كانت $د(س) = \frac{س^2 - 4}{س - 2}$ واضح أن مجال د = ح - \{٢\} يعني د(٢) = $\frac{0}{0}$ كمية غير معينة يعني لا يمكن تعيين قيمة للدالة عند س = ٢ . لذلك سوف نقوم دراسة إقتراب الدالة من قيمة معينة كلما إقتربت س من العدد ٢

ولدراسة هذا التقارب يوجد طريقتين: جبرية و بيانية

تقدير النهاية عدديًا

دراسة تقارب الدالة $د(س) = س + ٢$ عندما س تقترب من ١

س تقترب من ١ من اليمين ($س \to ^+١$) — س تقترب من ١ من اليسار ($س \to ^-١$)

س	١٫٤	١٫٣	١٫٢	١٫١		٠٫٩	٠٫٨	٠٫٧	٠٫٦
د(س)	٣٫٤	٣٫٣	٣٫٢	٣٫١		٢٫٩	٢٫٨	٢٫٧	٢٫٦

د(س) تقترب من ٣ من اليمين — د(س) تقترب من ٣ من اليسار

يسمى العدد ٣ بالنهاية اليمنى للدالة — يسمى العدد ٣ بالنهاية اليسرى للدالة

$$\lim_{س \to ^+١} د(س) = ٣ \qquad \lim_{س \to ^-١} د(س) = ٣$$

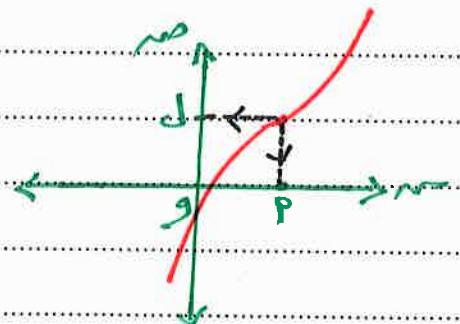
أو: $د(^+١) = ٣$ ، $د(^-١) = ٣$

تعريف: إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل عندما تقترب س من ا من اليمين واليسار فإن نهاية الدالة د(س) = ل ونكتب

$$\lim_{س \to ا} د(س) = ل$$

أى أن: $د(^+ا) = د(^-ا) = ل$

تقدير النهاية بيانيًا

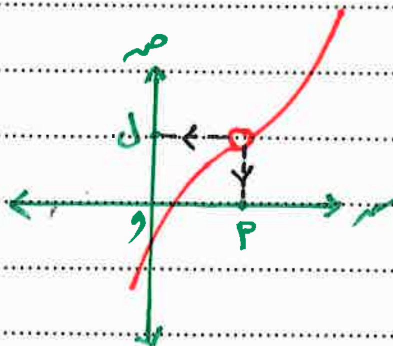


د(ا) = ل تعريف الدالة

د($^+$ا) = ل النهاية اليمنى

د($^-$ا) = ل النهاية اليسرى

$\lim_{س \to ا} د(س) = ل$

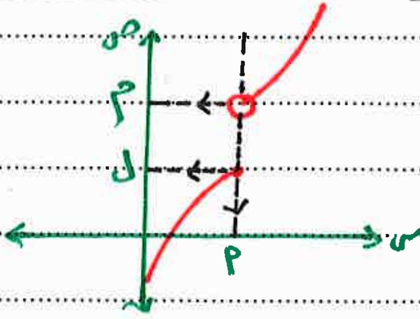


د(ا) = غير معرفة

د($^+$ا) = ل

د($^-$ا) = ل

$\lim_{س \to ا} د(س) = ل$



التعريف: $د(أ) = م$

النهاية اليمنى: $د(أ^{+}) = ل$

النهاية اليسرى: $د(أ^{-}) = ل$

$\therefore$ $\underset{س \leftarrow أ}{نها}\ د(س) = ل$

$د(أ) = ل$

$د(أ^{+}) = م$

$د(أ^{-}) = ل$

$\underset{س \leftarrow أ}{نها}\ د(س)$ غير موجودة

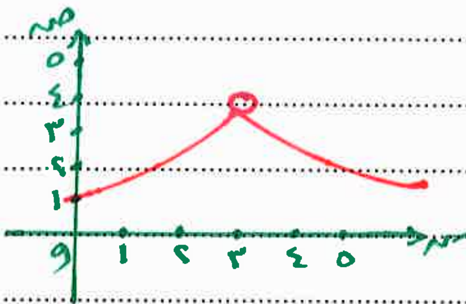
ملاحظات:

١) عند إيجاد نهاية الدالة ليس من الضروري أن تكون الدالة معرفة عند $س = أ$

٢) يجب أن تكون الدالة معرفة على فترة على يمين أ وفترة أخرى على يسار أ

٣) إذا كان $د(أ^{+}) \neq د(أ^{-})$ فإن نهاية الدالة غير موجودة

تدريب ٢ في الشكل المقابل .. أوجد:



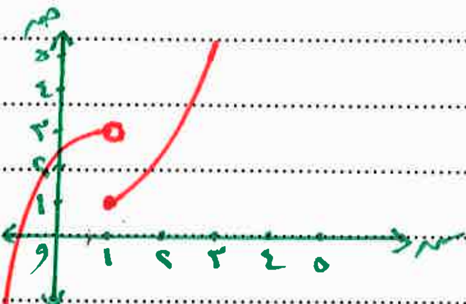
١) $د(٣) =$

٢) $د(٣^{+}) =$

٣) $د(٣^{-}) =$

٤) $\underset{س \leftarrow ٣}{نها}\ د(س) =$

تدريب ٣ في الشكل المقابل .. أوجد:



١) $د(١) =$

٢) $د(١^{+}) =$

٣) $د(١^{-}) =$

٤) $\underset{س \leftarrow ١}{نها}\ د(س) =$

إيجاد نهاية الدالة جبريًا

نظرية ١

إذا كانت: د(س) كثيرة حدود فى المتغير س فإنه: $\lim_{س \to أ}$ د(س) = د(أ)

نتيجة

إذا كانت: د(س) = ك حيث ك ثابتة فإنه: $\lim_{س \to أ}$ د(س) = $\lim_{س \to أ}$ ك = ك

نظرية ٢

إذا كانت د ، ر دالتين فى المتغير س وكانت: $\lim_{س \to أ}$ د(س) = ل ، $\lim_{س \to أ}$ ر(س) = م حيث ل ، م ∈ ح فإنه:

① $\lim_{س \to أ}$ [د(س) ± ر(س)] = $\lim_{س \to أ}$ د(س) ± $\lim_{س \to أ}$ ر(س) = ل ± م

② $\lim_{س \to أ}$ [د(س) × ر(س)] = $\lim_{س \to أ}$ د(س) × $\lim_{س \to أ}$ ر(س) = ل × م

③ $\lim_{س \to أ}$ [د(س) ÷ ر(س)] = $\lim_{س \to أ}$ د(س) ÷ $\lim_{س \to أ}$ ر(س) = ل ÷ م حيث م ≠ ٠

④ $\lim_{س \to أ}$ $[د(س)]^ن$ = $[\lim_{س \to أ} د(س)]^ن$ = $ل^ن$ حيث ن ∈ ص$^+$

تدريب ١ أكمل ما يأتى:

① $\lim_{س \to ٢}$ (٣س − ١)

② $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{س - ١}{س + ١}$ =

③ $\lim_{س \to ٤}$ $\frac{٣}{٥}$

④ $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{جتا س}{٣ + ٢س}$

⑤ $\lim_{س \to \pi}$ $\frac{جتا س}{س}$

تدريب ٢ اختر الإجابة الصحيحة

① $\lim_{س \to ٠}$ $\sqrt{٤ - س^٢}$ =
[−١ ، صفر ، ٢ ، ليس لها وجود]

② $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{٥}{(س - ٢)^٢}$ =
[$-\frac{٥}{٢}$ ، صفر ، ٥ ، ليس لها وجود]

③ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}}$ $\frac{ظا س}{س}$ =
[صفر ، ١ ، $\frac{٤}{\pi}$ ، ليس لها وجود]

ملحوظة: لإيجاد $\lim_{س \to أ} \frac{د(س)}{ر(س)}$ نوجد :-

$\lim_{س \to أ} د(س) = ل$ ، $\lim_{س \to أ} ر(س) = م$

وإذا كانت : ل = صفر ، م = صفر أى $\frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة فإننا نقوم باختصار المقدار (س − أ) عن طريق : تحليل – الضرب × المرافق – القسمة المطولة

تدريب ٣ : أوجد النهايات التالية :-

(١) $\lim_{س \to 3} \frac{س^2 - 9}{س - 3}$

$= \lim_{س \to 3} \frac{(س - 3)(س + 3)}{(س - 3)}$

$= \lim_{س \to 3} (س + 3) = 3 + 3 = 6$

(٢) $\lim_{س \to 4} \frac{س^2 + س - 20}{س^2 - 5س + 4}$

$= \lim_{س \to 4} \frac{(س - 4)(س + 5)}{(س - 1)(س - 4)}$

$= \lim_{س \to 4} \frac{س + 5}{س - 1} = \frac{9}{3} = 3$

(٣) $\lim_{س \to 3} \frac{س^3 - 27}{س - 3}$

$= \lim_{س \to 3} \frac{(س - 3)(س^2 + 3س + 9)}{(س - 3)}$

$= \lim_{س \to 3} (س^2 + 3س + 9) = 27$

(٤) $\lim_{س \to 1} \frac{2س^2 + س - 3}{س^2 - 1}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{(س - 1)(2س + 3)}{(س - 1)(س + 1)}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{2س + 3}{س + 1} = \frac{5}{2}$

(٥) $\lim_{س \to 0} \frac{(س + 5)^2 - 25}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س^2 + 10س + 25 - 25}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س^2 + 10س}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س(س + 10)}{س}$

$= \lim_{س \to 0} (س + 10) = 10$

لاحظ : جميع المسائل السابقة نوجد نهاية البسط ونهاية المقام والناتج = $\frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة لذلك إستخدمنا التحليل للإختصار في الحل.

تدريب ٤ : اختر الإجابة الصحيحة :-

① $\underset{س \to أ}{نهـا}(٢س^٢ - أس - أ^٢) = ...$

(أ) صفر (ب) أ

(ج) $أ^٢ - ٢أ$ (د) $٤أ^٢$

② $\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ + س - ١٢} =$

(أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$

(ج) -١ (د) -٥

③ $\underset{س \to أ}{نهـا} \frac{٢س^٢ - س - ٣}{٤س^٢ - ٩} = \frac{٥}{١٢}$ فإن: أ =

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $-\frac{٣}{٢}$

(ج) $-\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

④ $\underset{س \to ٤}{نهـا} \frac{٣س^٢ - ٨س - ١٦}{س^٢ - ٤} =$

(أ) ٤ (ب) ٢

(ج) ليس لها وجود (د) ١

⑤ إذا كانت: $\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$

حيث د(س) كثيرة حدود

فإن: $\underset{س \to ٢}{نهـا} د(س) = ...$

(أ) صفر (ب) ٢

(ج) ٥ (د) -٥

مسائل على الضرب في المرافق

① $\underset{س \to ٤}{نهـا} \frac{\sqrt{س-٣} - ١}{س - ٤}$

$= \underset{س \to ٤}{نهـا} \frac{\sqrt{س-٣} - ١}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س-٣} + ١}{\sqrt{س-٣} + ١}$

$= \underset{س \to ٤}{نهـا} \frac{(س - ٣ - ١)}{(س - ٤)(\sqrt{س-٣} + ١)}$

$= \underset{س \to ٤}{نهـا} \frac{١}{\sqrt{س-٣} + ١} = \frac{١}{٢}$

② $\underset{س \to ٥}{نهـا} \frac{\sqrt{س-١} - ٢}{س - ٥}$

$= \underset{س \to ٥}{نهـا} \frac{\sqrt{س-١} - ٢}{س - ٥} \times \frac{\sqrt{س-١} + ٢}{\sqrt{س-١} + ٢}$

$= \underset{س \to ٥}{نهـا} \frac{(س - ١ - ٤)}{(س - ٥)(\sqrt{س-١} + ٢)}$

$= \underset{س \to ٥}{نهـا} \frac{١}{\sqrt{س-١} + ٢} = \frac{١}{٤}$

③ $\underset{س \to -١}{نهـا} \frac{س + ١}{\sqrt{س+٥} - ٢}$

$= \underset{س \to -٢}{نهـا} \frac{س + ١}{\sqrt{س+٥} - ٢} \times \frac{\sqrt{س+٥} + ٢}{\sqrt{س+٥} + ٢}$

$= \underset{س \to -٢}{نهـا} \frac{(س + ١)(\sqrt{س+٥} + ٢)}{(س + ٥ - ٤)}$

$= \underset{س \to -٢}{نهـا} (\sqrt{س+٥} + ٢) = ٤$

مسائل على القسمة المطولة

(1) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^3 - \text{س}^2 - 5\text{س} + 6}{\text{س} - 2}$

(i) نرتب معاملات المقدار تنازلياً حسب قوى س

(ii) نأخذ معاملات المقدار الجبرى

2	6	−5	−1	1
	+	+	+	
	6−	2	2	
	0 (الباقى)	−3	1	1

$= \lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{(\text{س} - 2)(\text{س}^2 + \text{س} - 3)}{(\text{س} - 2)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 2} (\text{س}^2 + \text{س} - 3) = 4 + 2 - 3 = 3$

(2) $\lim\limits_{\text{س} \to 4} \dfrac{\text{س}^3 - 15\text{س} - 4}{\text{س} - 4}$

4	−4	−15	0	1
	+	+	+	
	4	16	4	
	0	1	4	1

$= \lim\limits_{\text{س} \to 4} \dfrac{(\text{س} - 4)(\text{س}^2 + 4\text{س} + 1)}{(\text{س} - 4)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 4} (\text{س}^2 + 4\text{س} + 1) = 33$

(4) $\lim\limits_{\text{س} \to 5} \dfrac{\text{س}^2 - 5\text{س}}{\sqrt{\text{س} + 4} - 3}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 5} \dfrac{\text{س}^2 - 5\text{س}}{\sqrt{\text{س} + 4} - 3} \times \dfrac{\sqrt{\text{س} + 4} + 3}{\sqrt{\text{س} + 4} + 3}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 5} \dfrac{\text{س}(\text{س} - 5)(\sqrt{\text{س} + 4} + 3)}{(\text{س} + 4 - 9)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 5} \text{س}(\sqrt{\text{س} + 4} + 3) = 5 \times 6 = 30$

(5) $\lim\limits_{\text{س} \to -1} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{\text{س} - 7}}{\text{س} - 9} = \dots\dots$

(أ) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (ب) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (جـ) $2\sqrt{2}$ (د) $-2\sqrt{2}$

(6) $\lim\limits_{\text{س} \to 4} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - 2}{5\text{س}^2 - 23\text{س} + 12} =$

(أ) $\dfrac{1}{92}$ (ب) $\dfrac{1}{68}$ (جـ) 68 (د) 92

(7) $\lim\limits_{\text{س} \to 4} \dfrac{\sqrt{2\text{س} + 1} - 3}{\text{س}^2 - 16} =$

(أ) $\dfrac{1}{12}$ (ب) $\dfrac{1}{24}$ (جـ) $\dfrac{1}{48}$ (د) $\dfrac{1}{36}$

(8) $\lim\limits_{\text{س} \to -1} \dfrac{\sqrt{\text{س}^2 + 8} - 3}{\text{س} + 1} =$

(أ) $-\dfrac{1}{3}$ (ب) $\dfrac{1}{3}$ (جـ) -3 (د) 3

نظرية ٤ (القانون)

إذا كان $ن \in ح - \{0\}$

(١) $\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن \times أ^{ن-١}$

(٢) $\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} \times أ^{ن-م}$

(٣) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{ن} - ١}{س^{م} - ١} = \frac{ن}{م}$

---

(١) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٤} - ٨١}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٤} - ٣^{٤}}{س - ٣} = ٤ \times ٣^{٤-١} = ١٠٨$

(٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٥} + ٣٢}{س + ٢}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{س^{٥} - (-٢)^{٥}}{س - (-٢)} = ٥(-٢)^{٤} = ٨٠$

(٣) $\lim_{س \to \sqrt{٥}} \frac{س^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{س - \sqrt{٥}}$

$= \lim_{س \to \sqrt{٥}} \frac{س^{٧} - (\sqrt{٥})^{٧}}{س - \sqrt{٥}}$

$= ٧ \times (\sqrt{٥})^{٦} = ٨٧٥$

---

(٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٣} - ٨}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٧} - ٢^{٧}}{س^{٣} - ٢^{٣}}$

$= \frac{٧}{٣} \times (٢)^{٤} = \frac{١١٢}{٣}$

(٥) $\lim_{س \to ٤} \frac{٢س^{٣} - ١٢٨}{س^{٢} - ١٦}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{٢(س^{٣} - ٦٤)}{س^{٢} - ١٦}$

$= ٢ \times \lim_{س \to ٤} \frac{س^{٣} - ٤^{٣}}{س^{٢} - ٤^{٢}}$

$= ٢ \times \frac{٣}{٢} \times ٤ = ١٢$

(٦) $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣} - \frac{١}{٨}}{س^{٢} - \frac{١}{٤}}$

$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣} - (\frac{١}{٢})^{٣}}{س^{٢} - (\frac{١}{٢})^{٢}} = \frac{٣}{٢} \times (\frac{١}{٢}) = \frac{٣}{٤}$

(٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٧} - ٢^{٧}}{(س - ٢)(س - ٣)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٧} - ٢^{٧}}{س - ٢} \times \lim_{س \to ٢} \frac{١}{س - ٣}$

$= ٧ \times ٢^{٦} \times \frac{١}{-١} = -٤٤٨$

⑧ $\underset{٢س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{١٢٨\,س^{٧} - ١}{٣٢\,س^{٥} - ١}$

$= \underset{٢س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{(٢س)^{٧} - ١}{(٢س)^{٥} - ١} = \dfrac{٧}{٥}$

⑨ $\underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(٣+هـ)^{٥} - ٢٤٣}{هـ}$

$\because$ هـ $\to ٠$ $\therefore ٣ +$ هـ $\to ٣$

$= \underset{٣+هـ \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{(٣+هـ)^{٥} - ٣^{٥}}{(٣+هـ) - ٣} = ٥ \times ٣^{٤} = ٤٠٥$

⑩ $\underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(٣+هـ)^{٤} - ٨١}{٦\,هـ}$

$= \dfrac{١}{٦} \underset{٣+هـ \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{(٣+هـ)^{٤} - ٣^{٤}}{(٣+هـ) - ٣}$

$= \dfrac{١}{٦} \times ٤ \times ٣^{٣} = ١٨$

⑪ $\underset{س \to ٦}{\text{نها}} \dfrac{(س-٥)^{٧} - ١}{س - ٦}$

$= \underset{س-٥ \to ١}{\text{نها}} \dfrac{(س-٥)^{٧} - ١}{(س-٥) - ١} = ٧$

⑫ $\underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(٣+٢هـ)^{٥} - ٢٤٣}{هـ}$

$= ٢ \times \underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(٣+٢هـ)^{٥} - ٣^{٥}}{(٣+٢هـ) - ٣}$

$= ٢ \times ٥ \times ٣^{٤} = ٨١٠$

⑬ $\underset{س \to ٢٧}{\text{نها}} \dfrac{س^{\frac{٥}{٣}} - ٢٤٣}{س - ٢٧} =$

(أ) ١٠ (ب) $\dfrac{٥}{٣}$ (جـ) ٩ (د) ٢٧

⑭ إذا كانت د(س) = $س^{٥}$ ، ر(س) = $س^{٢} - ٤$ فإن: $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{د(س) - ٣٢}{ر(س)} = \ldots\ldots$

(أ) −٢٠ (ب) ٢٠ (جـ) −٣٢ (د) ٣٠

⑮ إذا كان: $\underset{س \to أ}{\text{نها}} \dfrac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \dfrac{ن}{م}$ فإن أ = ...

(أ) $\dfrac{ن}{م}$ (ب) ن (جـ) م (د) ١

⑯ $\underset{س \to ١٦}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٤]{س^{٧}} - ١٢٨}{س - ١٦} =$

(أ) ١٤ (ب) −١٤ (جـ) $\dfrac{١}{١٤}$ (د) $\dfrac{-١}{١٤}$

⑰ إذا كانت: د(س) = $\dfrac{١}{س^{٤}}$ فإن:

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{د(س) - د(٢)}{س - ٢} =$

(أ) −٨ (ب) ٨ (جـ) $\dfrac{١}{٨}$ (د) $\dfrac{-١}{٨}$



نهاية دالة عند اللانهاية

نظرية:

$\lim_{س \to \infty} \frac{1}{س} = صفر$

نتيجة:

(1) $\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س^ن} = صفر$ حيث $ن \in ص^+$

(2) $\lim_{س \to \infty} ح = ح$ حيث ح ثابت

ملاحظات: عند إيجاد $\lim_{س \to \infty} \frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث د ، ر دوال كثيرة حدود ، ر(س) ≠ ٠ فإن:

(i) إذا كانت درجة البسط = درجة المقام ⟸ ناتج النهاية = عدد حقيقي ≠ ٠

(ii) إذا كانت درجة البسط < درجة المقام ⟸ ناتج النهاية = صفر

(iii) إذا كانت درجة البسط > درجة المقام ⟸ ناتج النهاية = $\pm \infty$

تدريب 1: أكمل ما يأتي:

1) $\lim_{س \to \infty} (\frac{1}{س} + 4) =$

2) $\lim_{س \to \infty} (5 - \frac{1}{س^2}) =$

3) $\lim_{س \to \infty} \sqrt{\frac{1}{س}} =$

4) $\lim_{س \to \infty} 9 =$

5) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{\frac{4}{س} + 1}) =$

6) $\lim_{س \to \infty} (س^2 - 3) =$

7) $\lim_{س \to \infty} \frac{5^{-1}}{س} =$

تدريب 2: أوجد النهايات التالية:

1) $\lim_{س \to \infty} (س^3 + 5س^2 + 1)$

$= \infty + \infty + 1 = \infty + 1 = \infty$

2) $\lim_{س \to \infty} (س^{-2} + س^{-1} + 4)$

$= \lim_{س \to \infty} (\frac{1}{س^2} + \frac{1}{س} + 4)$

$= 0 + 0 + 4 = 4$

3) $\lim_{س \to \infty} (س^3 - 5س^2 + 1)$

$= \lim_{س \to \infty} س^3 (1 - \frac{5}{س} + \frac{1}{س^3})$

$= \infty (1 - 0 + 0) = \infty$

تدريب ٣: أوجد ناتج النهايات التالية

(١) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{5-6\text{س}-3\text{س}^2}{2\text{س}^2+\text{س}-4}$

بقسمة البسط والمقام على أعلى أس للمتغير س في المقام س²

$= \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\frac{5}{\text{س}^2}-\frac{6\text{س}}{\text{س}^2}-\frac{3\text{س}^2}{\text{س}^2}}{\frac{2\text{س}^2}{\text{س}^2}+\frac{\text{س}}{\text{س}^2}-\frac{4}{\text{س}^2}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\frac{5}{\text{س}^2}-\frac{6}{\text{س}}-3}{2+\frac{1}{\text{س}}-\frac{4}{\text{س}^2}}$

$= \dfrac{0-0-3}{2+0-0} = -\dfrac{3}{2}$

(٢) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{2\text{س}^2-1}{4\text{س}^3-5\text{س}-1}$ بالقسمة على س³

$= \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\frac{2}{\text{س}}-\frac{1}{\text{س}^3}}{4-\frac{5}{\text{س}^2}-\frac{1}{\text{س}^3}} = \dfrac{\text{صفر}}{4} = \text{صفر}$

(٣) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\text{س}^3-2}{3\text{س}^2+4\text{س}+1}$ ÷ س²

$= \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\text{س}-\frac{2}{\text{س}^2}}{3+\frac{4}{\text{س}}+\frac{1}{\text{س}^2}}$

$= \dfrac{\infty-0}{3+0+0} = \dfrac{\infty}{3} = \infty$

(٤) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{(3\text{س}+2)(5\text{س}-1)}{(4\text{س}+3)(2\text{س}-7)}$

لاحظ لو تم فك الأقواس هايكون تربيعة س²

$= \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\left(\frac{3\text{س}}{\text{س}}+\frac{2}{\text{س}}\right)\left(\frac{5\text{س}}{\text{س}}-\frac{1}{\text{س}}\right)}{\left(\frac{4\text{س}}{\text{س}}+\frac{3}{\text{س}}\right)\left(\frac{2\text{س}}{\text{س}}-\frac{7}{\text{س}}\right)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\left(3+\frac{2}{\text{س}}\right)\left(5-\frac{1}{\text{س}}\right)}{\left(4+\frac{3}{\text{س}}\right)\left(2-\frac{7}{\text{س}}\right)} = \dfrac{15}{8}$

(٥) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{(2\text{س}^3-5)(7\text{س}^2+1)}{\text{س}^5+4}$

بالقسمة على $\text{س}^5 = \text{س}^3 \times \text{س}^2$

$= \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\left(2-\frac{5}{\text{س}^3}\right)\left(7+\frac{1}{\text{س}^2}\right)}{1+\frac{4}{\text{س}^5}}$

$= \dfrac{14}{1} = 14$

(٦) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \left(7+\dfrac{2\text{س}^2}{(\text{س}+3)^2}\right)$

$= \lim\limits_{\text{س}\to\infty} 7 + \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{2\text{س}^2}{\text{س}^2+6\text{س}+9}$

$= 7 + \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{2}{1+\frac{6}{\text{س}}+\frac{9}{\text{س}^2}}$

$= 7 + 2$

$= 9$

ملحوظة: $\sqrt{س^2} = \sqrt[3]{س^3} = \sqrt[4]{س^4} = \dots = س$

⑦ $\lim_{س \to \infty} \frac{5س + 7}{\sqrt{4س^2 + 9}}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{5 + \frac{7}{س}}{\sqrt{4 + \frac{9}{س^2}}}$ ∵ $\sqrt{س^2} = س$

$= \frac{5 + 0}{\sqrt{4 + 0}} = \frac{5}{2}$

⑧ $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س^2 + 5}}{\sqrt[3]{8س^3 + 4}}$

بالقسمة على $\sqrt{س^2} = \sqrt[3]{س^3} = س$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{5}{س^2}}}{\sqrt[3]{8 + \frac{4}{س^3}}} = \frac{1}{2}$

⑨ $\lim_{س \to \infty} \frac{2س^{-1} - 3س^{-2} + س^{-3}}{4س^{-3} + س^{-1}}$

بضرب البسط والمقام × $س^3$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{2س^2 - 3س + 1}{4 + س^2}$ ÷ $س^2$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{2 - \frac{3}{س} + \frac{1}{س^2}}{\frac{4}{س^2} + 1}$

$= \frac{2 - 0 + 0}{0 + 1}$

$= 2$

تدريب ٤ إختر الإجابة الصحيحة :-

① $\lim_{س \to \infty} \frac{3س^2}{س(2س - 1)} =$

(أ) $\frac{3}{2}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) صفر (د) 3

② إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{أس^2 - 5س}{2س + 3س^2} = 3$ فإن أ = ...

(أ) 3 (ب) 6 (ج) 9 (د) 12

③ $\lim_{س \to \infty} \frac{5 + س^{-2}}{1 + 3س^{-2}} =$

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{5}{4}$ (ج) $\frac{5}{3}$ (د) 5

④ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{3س^2 + 2س + 1}{س^2 - 3س + 2}\right)^4 =$

(أ) 3 (ب) 9 (ج) 27 (د) 81

⑤ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{-5} + 2س^{-3} - س^{-2}}{(3س + 4)^{-2}} =$ ......

(أ) 9 (ب) -9 (ج) $\frac{1}{3}$ (د) صفر



نهاية الدوال المثلثية

نظرية:

$$\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } س}{س} = 1 \qquad \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا } س}{س} = 1$$

حيث س بالتقدير الدائري

نتائج:

(1) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } أس}{س} = أ$

(2) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } أس}{ب س} = \frac{أ}{ب}$

(3) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 أس}{س^2} = أ^2$

(4) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا } س}{س} = \text{صفر}$

تدريب 1

أكمل ما يأتي:

(1) $\lim_{س \to 0} \text{جتا } 3س =$

(2) $\lim_{س \to 0} \text{ظا } س =$

(3) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \text{جا } 2س =$

(4) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } 7س}{س} =$

(5) $\lim_{س \to 0} \frac{3 + 2س}{\text{جتا } 4س} =$

(6) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا } س}{3س} =$

(7) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س^2} =$

(8) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 3س}{5س^2} =$

(9) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا } 3س}{4س} =$

(10) $\lim_{س \to 5} \frac{\text{جا}(س - 5)}{3س - 15} =$

(11) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } \pi س}{2س} =$

(12) $\lim_{س \to 0} \frac{2س}{\text{ظا } 3س} =$

(13) $\lim_{س \to 0} 3س \text{ قتا } 2س =$

(14) $\lim_{س \to 0} س \text{ ظتا } س =$

(15) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } س \text{ ظا } 3س}{4س^2} =$

(16) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا } \frac{1}{2}س}{\text{ظا } 3س} =$

تدريب ٢ أوجد النهايات التالية :-

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢س - ٣ حاس}{٣س + طاس}$

بقسمة البسط والمقام على س

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢ - ٣ \times \frac{حاس}{س}}{٣ + \frac{طاس}{س}} = \frac{٢ - ٣}{٣ + ١} = \frac{-١}{٤}$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{٤س^٢ + طا٣س}{٧س - طا٤س}$

بقسمة البسط والمقام على س

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٤س + \frac{طا٣س}{س}}{٧ - \frac{طا٤س}{س}} = \frac{٠ + ٣}{٧ - ٤} = ١$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{٤س^٢ + حا^٢٣س}{س^٢ + طا٥س^٢}$

بقسمة البسط والمقام على $س^٢$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٤ + \frac{حا^٢٣س}{س^٢}}{١ + \frac{طا٥س^٢}{س^٢}} = \frac{٤ + ٩}{١ + ٥} = \frac{١٣}{٦}$

٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتاس}{طاس}$

بقسمة البسط والمقام على س

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{١ - جتاس}{س}}{\frac{طاس}{س}} = \frac{صفر}{١} = صفر$

٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{حا(س - ٣)}{٢س - ٦}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{حا(س - ٣)}{٢(س - ٣)} = \frac{١}{٢}$

٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{طا(س - ٢)}{س^٢ - ٤}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{طا(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{طا(س - ٢)}{(س - ٢)} \times \lim_{س \to ٢} \frac{١}{س + ٢}$

$= ١ \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$

تذكر أن

١) $حا(\pi - س) = حاس$

٢) $طا(\pi - س) = -طاس$

٣) $حا(\frac{\pi}{٢} - س) = جتاس$

٤) $طا(\frac{\pi}{٢} - س) = ظتاس$

٥) $١ - جتا^٢س = حا^٢س$

⑦ $\lim\limits_{س \to \pi} \frac{جاس}{س - \pi}$

لاحظ أن: $جا(\pi - س) = جاس$

$\therefore \lim\limits_{س \to \pi} \frac{جا(\pi - س)}{-(\pi - س)} = -1$

⑧ $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جتاس}{2س - \pi}$

إفتكر مهايا: $جا(\frac{\pi}{2} - س) = جتاس$

$\therefore \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جا(\frac{\pi}{2} - س)}{-2(\frac{\pi}{2} - س)} = -\frac{1}{2}$

⑨ $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{ظتاس}{س - \frac{\pi}{2}}$

إفتكر وهايا: $ظا(\frac{\pi}{2} - س) = ظتاس$

$\therefore \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{ظا(\frac{\pi}{2} - س)}{-(\frac{\pi}{2} - س)} = -1$

⑩ $\lim\limits_{س \to 0} \frac{1 - جتا^2 3س}{س^2}$

إفتكر وهايا: $1 - جتا^2 س = جا^2 س$

$\therefore \lim\limits_{س \to 0} \frac{جا^2 3س}{س^2} = 9$

تدريب ٣ إختر الإجابة الصحيحة

① $\lim\limits_{س \to 0} \left[\frac{جا2س}{3س} + \frac{س جا^2 س}{جا^3 س}\right] =$

(أ) $\frac{5}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$

(ج) 1 (د) $\frac{4}{3}$

② $\lim\limits_{س \to 0} \frac{4 - ظا3س}{ظاس - 2جتاس} = \ldots\ldots$

(أ) 2 (ب) -2

(ج) 1 (د) -1

③ إذا كان $\lim\limits_{س \to 0} \frac{(أ + 3)س}{ظا أس} = \frac{2}{5}$

فإن: أ = ...

(أ) -5 (ب) -3

(ج) -1 (د) 3

④ $\lim\limits_{س \to 0} \frac{جاس - ظاس جتاس}{س^2} =$

(أ) صفر (ب) 1

(ج) 2 (د) 3

⑤ إذا كانت $\lim\limits_{س \to 0} \frac{جا^2 أس - ظا 2أس^2}{س^2} = -1$

فإن: أ = ...

(أ) -1 (ب) 2

(ج) 1 (د) 4

بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة

الدالة د(س) تؤول إلى النهاية ل عندما س ← أ إذا وفقط إذا كانت نهايتها اليمنى واليسرى عند أ موجودتين وكل منهما تساوى ل أى أن:

① النهاية اليمنى موجودة $\qquad$ د(أ$^+$) = ل

② النهاية اليسرى موجودة $\qquad$ د(أ$^-$) = ل

③ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى $\qquad$ د(أ$^+$) = د(أ$^-$) = ل

تدريب ١ : إبحث وجود نهاية لكل مما يأتى :

① د(س) = { ٢س ، س ≥ ٢ ؛ س² ، س < ٢ } عند س = ٢

س² | ٢س (عند ٢)

د(٢$^+$) = نها ٢س = ٤ (س ← ٢)

د(٢$^-$) = نها س² = ٤ (س ← ٢)

∴ د(٢$^+$) = د(٢$^-$) ∴ نها د(س) = ٤ (س ← ٢)

② د(س) = { س² + ١ : س < ٣ ؛ ٣س + ١ : س ≥ ٣ } عند س = ٣

س² + ١ | ٣س + ١ (عند ٣)

د(٣$^+$) = نها ٣س + ١ = ٩ + ١ = ١٠ (س ← ٣)

د(٣$^-$) = نها س² + ١ = ٩ + ١ = ١٠ (س ← ٣)

∴ نها د(س) = ١٠ (س ← ٣)

③ د(س) = { $\frac{٣س + طاس}{٥س - طاس}$: س > ٠ ؛ جتا س : س < ٠ } عند س = ٠

د(٠$^+$) = نها $\frac{٣س + طاس}{٥س - طاس}$ (س ← ٠) بالقسمة على س

= نها $\frac{٣ + \frac{طاس}{س}}{٥ - \frac{طاس}{س}}$ = $\frac{٣ + ١}{٥ - ١}$ = ١ (س ← ٠)

د(٠$^-$) = نها جتا س = جتا ٠ = ١ (س ← ٠)

∴ نها د(س) = ١ (س ← ٠)

④ إذا كانت: د(س) = { أس − ٣ ، س ≤ −١ ؛ س² + أ ، س > −١ }

أوجد قيمة أ التي تجعل د(س) لها وجود

أس − ٣	س² + أ
−١	

∵ الدالة لها نهاية عند س = −١

∴ د(−١)⁺ = د(−١)⁻

∴ ١ + أ = −أ − ٣

∴ أ = −٢

⑤ إذا كانت د(س) = { س² + ٣م ، س < ٢ ؛ ٥س + ك ، س > ٢ }

أوجد قيمة م، ك التي تجعل: $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٧

س² + ٣م	٥س + ك
٢	

∵ د(٢)⁺ = ٧

∴ ١٠ + ك = ٧

∴ ك = −٣

∵ د(٢)⁻ = ٧

∴ ٤ + ٣م = ٧

∴ م = ١

تدريب ٢ : إختر الإجابة الصحيحة :

① إذا كانت د(س) = { ٣س − ١ ، س ≠ ٢ ؛ ٦ ، س = ٢ }

فإن: $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ...

(أ) ٥ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ليس لها وجود

② إذا كانت د(س) = { ظتا س ÷ (π − ٢س) ، ٠ < س < π/٢ ؛ ظا(π − س) ، س > π/٢ }

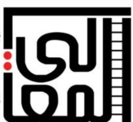
فإن: $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}}$ د(س) = ...

(أ) ٢ (ب) π/٢ (ج) π (د) غير موجودة

③ إذا كانت د(س) = { جا ٢س ÷ س ، س < ٠ ؛ أ جتا س ، س ≥ ٠ }

حيث $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = ٢ فإن أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) صفر (د) −٢



دايما فى العلالى
٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧
٠١١١١٩٥٤٨٠٠

الإتصال

تكون الدالة د(س) متصلة عند س = أ إذا تحققت الشروط الآتية معاً :-

١) د(س) معرفة عند س = أ .... د(أ) لها وجود

٢) د(س) لها نهاية عند س = أ .... نهـا (س ← أ) د(س) لها وجود

٣) نهـا (س ← أ) د(س) = د(أ) .... ناتج التعريف = ناتج النهاية

تدريب ١ ابحث اتصال الدوال التالية عند النقطة المعرفة عندها الدالة .

١) د(س) = { ٢س + ١ : س ≤ ١ ، س² + ٢ : س > ١ } عند س = ١

س² + ٢ | ٢س + ١ (عند ١)

(i) د(١) = ٣

(ii) د(١⁺) = نهـا (س ← ١) س² + ٢ = ٣

(iii) د(١⁻) = نهـا (س ← ١) ٢س + ١ = ٣

∴ الدالة متصلة عند س = ١

٢) د(س) = { ٥ − ٢س ، س < −١ ؛ ٣س + ٧ : س ≥ −١ } عند س = −١

(i) د(−١) =

(ii) د(−١)⁺ =

(iii) د(−١)⁻ =

٣) د(س) = { (√(س+١) − ٢) / (س − ٣) : س ≠ ٣ ؛ ١/٤ : س = ٣ } عند س = ٣

(√(س+١) − ٢)/(س − ٣) | (√(س+١) − ٢)/(س − ٣) (عند ٣)

لاحظ : س ≠ ٣ معناها القاعدة يمين = القاعدة يسرى

(i) د(٣) = ١/٤

(ii) د(٣⁺) = د(٣⁻) = نهـا (س ← ٣) (√(س+١) − ٢)/(س − ٣) × (√(س+١) + ٢)/(√(س+١) + ٢)

= نهـا (س ← ٣) (س + ١ − ٤) / ((س − ٣)(√(س+١) + ٢))

= ١/٤

∴ د(٣) = نهـا (س ← ٣) د(س)

∴ الدالة متصلة عند س = ٣

(٤) $د(س) = \begin{cases} ١ + طاس & : س < \frac{\pi}{٢} \\ (س - \frac{\pi}{٢})^٢ + ٢ & : س \geq \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

عند $س = \frac{\pi}{٢}$

(أ) $د(\frac{\pi}{٢}) =$

∴

(ب) $د(\frac{\pi}{٢})^+ =$

(ج) $د(\frac{\pi}{٢})^- =$

∴

تدريب ٣ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{جا(س-٣)}{٢س-٦} & : س \neq ٣ \\ ك & : س = ٣ \end{cases}$

متصلة عند $س = ٣$ أوجد قيمة ك

∵ الدالة متصلة عند $س = ٣$

∴ $د(٣) = \lim_{س \to ٣} د(س)$

∴ $ك = \lim_{س \to ٣} \frac{جا(س-٣)}{٢(س-٣)}$

∴ $ك = \frac{١}{٢}$

تدريب ٢ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} أس^٢ + ١ & : س \geq ٢ \\ ٢س + ١ & : س < ٢ \end{cases}$

متصلة عند $س = ٢$ أوجد قيمة أ

٢س + ١	أس² + ١
	٢

∵ الدالة متصلة عند $س = ٢$

∴ $د(٢)^+ = د(٢)^-$

∴ $٤أ + ١ = ٤ + ١$

∴ $أ = ١$

تدريب ٤ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{٥س + طاس}{جاس} & : س > ٠ \\ ٦جتاس & : س \leq ٠ \end{cases}$

أعد تعريف الدالة بحيث تكون متصلة عند $س = ٠$

$د(٠)^+ = \lim_{س \to ٠^+} \frac{٥س + طاس}{جاس}$ ÷ س

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{٥ + \frac{طاس}{س}}{\frac{جاس}{س}} = ٦$

$د(٠)^- = \lim_{س \to ٠^-} ٦جتاس = ٦جتا٠ = ٦$

∴ $د(س) = \begin{cases} \frac{٥س + طاس}{جاس} & : س > ٠ \\ ٦ & : س = ٠ \\ ٦جتاس & : س < ٠ \end{cases}$

إتصال دالة على فترة

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة ف =]أ، ب[فإن د تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمي للفترة

ملاحظات

1) جميع الدوال كثيرة الحدود متصلة على ح أو فترة جزئية من ح

2) الدوال الكسرية متصلة على ح - {أصفار المقام} أو فترة جزئية منها

3) دالة الجيب د(س) = جا س ودالة جيب التمام د(س) = جتا س متصلة على ح أو فترة جزئية منها

تدريب ٥

إختر الإجابة الصحيحة:

1) إذا كانت د دالة حيث:

$$د(س) = \begin{cases} ٢س & حيث\ س \le ١ \\ ٣س - أ & س > ١ \end{cases}$$

متصلة عند س = ١ فإن: أ = ...

(أ) -١ (ب) -٢ (ج) ٢ (د) ١

2) إذا كانت

$$د(س) = \begin{cases} ل س & عند\ س \le ٢ \\ ٣س + ل & عند\ س > ٢ \end{cases}$$

متصلة عند س = ٢ فإن: ل = ...

(أ) ٦ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٣

3) إذا كانت

$$د(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{س+٣} - ٢}{س - ١} & : س \ne ١ \\ أ & : س = ١ \end{cases}$$

متصلة عند س = ١ فإن أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) $\frac{١}{٤}$ (د) ٤

4) الدالة د: $د(س) = \frac{-س}{س^٢ + ١}$ متصلة على ....

(أ) ح - {٠} (ب) ح - {-١، ١} (ج) ح (د) ح - {١}

اللهم إن كان من توفيق فمن الله
وإن كان من خطأ أو نسيان فمني والشيطان

المعالي
دايما فى العلالى
٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧
٠١١١١٩٥٤٨٠٠